



**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE**

**Fakulta elektrotechnická  
Katedra elektroenergetiky**

## **Výpočetní metody v indukčním ohřevu**

## **Computational methods in induction heating**

Bakalářská práce

Studijní program: Elektrotechnika, energetika a management

Studijní obor: Aplikovaná elektrotechnika

Vedoucí práce: **Ing. Zdeněk Novák**

**Ondřej Dolejší**

**Praha 2014**

## Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem zadanou bakalářskou práci vypracoval samostatně s přispěním vedoucího práce a použil jsem podklad a odbornou literaturu, kterou uvádím v seznamu na konci této práce.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č.121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne:.....

podpis:.....

## **Poděkování**

Rád bych poděkoval vedoucímu své bakalářské práce za mnoho cenných rad a za jeho trpělivost. Dále děkuji panu Ing. Lubomíru Musálkovi za pomoc se seznámením se softwarem Agros2D a užitečnými radami při realizaci modelu v tomto softwaru.

Také děkuji své rodině za podporu při studiu na vysoké škole.

## **Abstract**

The work deals with the physical and mathematical theory of induction heating. Furthermore I'll be interested in the solution of electromagnetic and thermal fields in the hollow batch using the equivalent circuit using a calculation software Agros2D. Finally, I will compare these two methods.

## **Anotace**

Práce pojednává o fyzikální a matematické teorii indukčního tepla. Dále se v práci budu zajímat řešením elektromagnetického a tepelného pole v duté vsázce pomocí metody náhradního schématu a výpočtu použitím softwaru Agros2D. Nakonec budu tyto dvě metody porovnávat.

Klíčová slova: Maxwellovy rovnice, teplotní pole, Poyntingův vektor,  
metoda konečných prvků, Agros2D

# Obsah

1.Úvod.....	7
2.Teorie Indukčního ohřevu.....	8
2.1.Výpočet elektromagnetického pole.....	8
2.1.1. Maxwellovy rovnice.....	8
2.1.2. Úpravy rovnic.....	9
2.1.3. Vlnění ve vodivé válcové vsázce.....	11
2.1.4. Volba tvaru vsázek a parametrů pro výpočet.....	13
2.2.Výpočet Poyntingova vektoru.....	14
2.3.Výpočet pomocí náhradního schematu.....	17
2.3.1.Pro plnou vsázku.....	17
2.3.1.1.Určení odporu $R_1(1N)$ .....	20
2.3.1.2.Určení indukčnosti $L_1(1N)$ .....	21
2.3.1.3.Určení parametrů $p$ , $L_2$ a $R_2$ .....	22
2.3.2.Pro dutou vsázku.....	24
2.4.Výpočet teplotního pole.....	27
2.4.1.Obecná rovnice teplotního pole.....	27
2.4.2.Okrajové a počáteční podmínky.....	28
2.5.Metoda konečných prvků.....	29
2.5.1.Matematická definice FEM.....	30
2.5.2.Obecnější tvar FEM.....	30
2.5.3.Princip FEM.....	32
3.Metody výpočtu pro dutou vsázku.....	33
3.1.Metoda výpočtu pomocí náhradního schématu pro dutou vsázku.....	33
3.2.Výpočet pomocí softwaru Agros2D.....	38
3.2.1.Základní popis softwaru Agros2D.....	38
3.2.2.Model pro preprocesor.....	38
4.Závěr.....	41
5.Použitá literatura.....	42

6.Přílohy.....	43
6.1.Příloha: Zdrojový kód v SW Mathematica pro výpočet elektromagnetického a tepelného pole pro dutou vsázku.....	43
6.2.Příloha: Zdrojový kód pro výpočet elektromagnetického a tepelného pole v SW Agros2D.....	47

# 1. Úvod

S ohřevem se v životě setkáme úplně všude, od ohřátí večeře v mikrovlnné troubě až po tavení kovů ve velkých závodech. V průmyslu je ohřev jeden ze základních principů úpravy materiálů. Je mnoho druhů ohřevů. Nás bude zajímat ohřev elektrický. Elektrický ohřev lze rozdělit na několik typů jako např. odporový, indukční, dielektrický, obloukový, plazmový, elektronový a laserový. Každý z těchto typů ohřevu má své klady a zápory, které musíme brát na vědomí při jeho aplikaci. Dále se dá ohřev rozdělit podle toho zda se teplo dodává sáláním, přestupem či vzniká přímo v ohřívaném předmětu. V této práci bude pojednáno o ohřevu, kde se teplo bude tvořit přímo v materiálu, tedy o ohřevu indukčním.

## 2. Teorie Indukčního ohřevu

Ohřev pomocí indukčního ohřevu lze provádět pouze s elektricky vodivými materiály. Pokud vodivý předmět vložíme do střídavého magnetického pole v předmětu se budou indukovat vířivé proudy, které budou daný předmět zahřívat. Teplo tedy není do vsázky dodáváno tepelným spádem, ale je dopraveno magnetickým polem, které vzniká přímo ve vsázce. Každý vodič, kterým protéká střídavý elektrický proud, je zdrojem elektromagnetického záření. Vodič je nutno upravit do vhodného tvaru vzhledem k ohřívání vsázky, aby byla zajištěna maximální účinnost přenosu energie ze zářícího vodiče. Rozdělení tepla v ohřívaném předmětu je možno ovlivňovat pomocí vhodné volby frekvence proudu, který bude procházet v ohřívacím vinutím. Největší výhodou indukčního ohřevu je, že vsázka není s ničím svázána a teplo vzniká přímo ve vsázce.

### 2.1. Výpočet elektromagnetického pole

#### 2.1.1. Maxwellovy rovnice

Maxwellovy rovnice jsou popisem zákonitostí elektromagnetické přírody. Tyto rovnice splňují Diracovo krédo a to, že fyzikální zákon by měl mít matematickou krásu.

Jako první rovnici uvedeme Ampérův zákon.

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.1)$$

,kde:

$\vec{H}$  je vektor intenzity magnetického pole [ $A \cdot m^{-1}$ ]

$\vec{D}$  je vektor elektrické indukce [ $C \cdot m^{-2}$ ]

$\vec{J}$  je vektor proudové hustoty [ $A \cdot m^{-2}$ ]

t je čas [s]



Jako druhou rovnici si představíme Faradayův zákon.

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

,kde:

$\vec{E}$  je vektor intenzity elektrického pole [ $\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$ ]

$\vec{B}$  je vektor magnetické indukce [T]

Dále si uvedeme Gaussův zákon elektrostatického pole.

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (2.3)$$

,kde:

$\rho$  je hustota nábojů [ $\text{C}\cdot\text{m}^{-3}$ ]

A nakonec zbývá Gaussův zákon magnetostatického pole.

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (2.4)$$

Rovnice v tomto znění Maxwell nikdy nenapsal, jelikož veličiny vyjadřoval pomocí kvaternionů (zobecněná komplexní čísla do tří rozměrů). Přehlednost a matematickou krásu dal rovnicím Oliver Heaviside v roce 1854.[1]

Dále platí vztahy pro veličiny  $\vec{J}$ ,  $\vec{D}$  a  $\vec{B}$ , které budou potřeba při úpravě Maxwellových rovnic v následující kapitole.

$$\vec{J} = \gamma \vec{E} \quad (2.5)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (2.6)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (2.7)$$

,kde:

$\epsilon_r$  je relativní permitivita prostředí [-]

$\epsilon_0$  je permitivita vakua, tedy  $\frac{1}{(36 \cdot \pi)} \cdot 10^{-9}$  [ $\text{F}\cdot\text{m}^{-1}$ ]

$\gamma$  je měrná elektrická vodivost [ $\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$ ]

$\mu_0$  je permeabilita vakua, tedy  $4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$  [ $\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$ ]

$\mu_r$  je relativní permeabilita prostředí [-]

### 2.1.2. Úpravy rovnic

Nyní je třeba upravit Maxwellovy pomoci vztahy pro veličiny  $\vec{J}, \vec{D}, \vec{B}$ , tudíž postupně do rovnic (2.1), (2.2) a (2.3) dosadíme rovnice (2.5), (2.6) a (2.7):

$$\text{rot } \vec{H} = \gamma \vec{E} + \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.8)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2.9)$$

$$\text{div } \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \rho \quad (2.10)$$

$$\text{div } \mu_0 \mu_r \vec{H} = 0 \quad (2.11)$$

Provedeme rotaci rovnice (2.1.8)

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{H}) = \text{rot } \gamma \vec{E} + \text{rot } \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.12)$$

Nyní za  $\text{rot } \vec{E}$  dosadíme rovnici (2.2) a dostaneme:

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{H}) = -\gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial(\mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t})}{\partial t} \quad (2.13)$$

V rovnici (2.13) můžeme  $\mu_0$  a  $\mu_r$  vytknout před derivace, jelikož nejsou závislá na čase:

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{H}) = -\gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \text{rot } \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (2.14)$$

Z vektorového počtu je známo, že:

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{H}) = \text{grad}(\text{div } \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} \quad (2.15)$$

, kde

$$\nabla \vec{H} \text{ je vektor } \left( \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial z} \right)$$

Nyní použijeme (2.15), dosadíme do (2.14) a dostaneme:

$$\text{grad}(\text{div } \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} = -\gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (2.16)$$

Nyní upravíme rovnici (2.4) dosazením rovnice (2.6) a dostaneme:

$$\text{div } \mu_0 \mu_r \vec{H} = 0 \quad (2.17)$$

Jelikož platí vztah (2.17) pro rovnici (2.16) platí:

$$\nabla^2 \vec{H} = \gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (2.18)$$

Dále odvodíme elektrickou složku pomocí rotace rovnice (2.9):

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial(\text{rot} \vec{H})}{\partial t} \quad (2.19)$$

Za  $\text{rot} \vec{H}$  dosadíme (2.8)

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = -\gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (2.20)$$

Dosazením vztahu (2.15) a rovnice (2.10) do (2.20) dostaneme:

$$\nabla^2 \vec{E} = \gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \text{grad} \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (2.21)$$

Pro indukční ohřev nás budou zajímat pouze předměty z vodivých materiálů. Proto považujeme naše prostředí za dokonale vodivé a tudíž můžeme do rovnice (2.21) dosadit  $\epsilon_r=0$  a  $\rho=0$ . Potom se rovnice (2.18) a (2.21) zjednoduší na tvar:

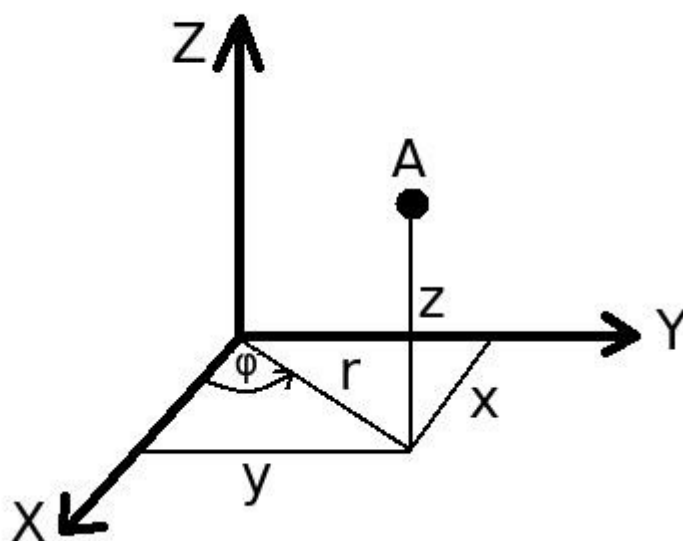
$$\nabla^2 \vec{H} = \gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2.22)$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.23)$$

### 2.1.3. Vlnění ve vodivé válcové vsázce

Jelikož se budeme zabývat ohřevem válcové vsázky, pak je třeba uvést vztahy pro elektromagnetické vlnění ve válcových předmětech. Budeme uvažovat, že střídavé magnetické pole, ve kterém je vsázka uložena, má směr osy vsázky. Poněvadž směry toků veličin jsou v daném poloměru konstantní, tak je výhodné zavést válcové (cylindrické) souřadnice podle Obr. 2.1 A to tak, že bod definovaný v kartézských souřadnicích souřadnicemi  $[x,y,z]$  převedeme do cylindrických souřadnic  $[r \cos \varphi, r \sin \varphi, z]$ . Tedy za  $[x,y,z]$  dosadíme podle:

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad z = z \quad (2.24)$$



Obr. 2.1 Zavedení válcových souřadnic

Tedy pro libovolný vektor ve válcových souřadnicích platí vztah:

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{H}}{\partial r} \quad (2.25)$$

Protože na souřadnici  $r$  jsou  $\vec{E}$  a  $\vec{H}$  konstantní, pak platí:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial \varphi} = 0 \quad (2.26)$$

Pak bude rovnice (2.1.25) mít tvar:

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{H}}{\partial r} \quad (2.27)$$

Nyní můžeme do rovnic pro vodivé prostředí (2.22) a (2.23) dosadit  $\nabla^2 \vec{H}$  a  $\nabla^2 \vec{E}$  dle vztahu (2.27):

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{H}}{\partial r} = \gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{E}}{\partial r} = \gamma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.29)$$

Nyní jsme získali rovnice, kde jsou  $\mathbf{H}$  a  $\mathbf{E}$  závislé na čase a poloměru. Časovou změnu můžeme vyjádřit jako rotující fázor v komplexní rovině. Směr  $\mathbf{H}$  a  $\mathbf{E}$  se v prostoru nebude nijak měnit, jelikož jejich směr v prostoru není nijak závislý na této matematické úpravě. Jelikož je nám směr  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{H}$  známý, tak získáme fázory v komplexní rovině vyjadřující svou časovou proměnnost. Takže dostaneme:

$$\vec{E} = E_m e^{j\omega t} \quad (2.30)$$

$$\vec{H} = H_m e^{j\omega t} \quad (2.31)$$

Provedeme derivaci rovnic (2.30) a (2.31) podle času:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j\omega \vec{E} \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = j\omega \vec{H} \quad (2.33)$$

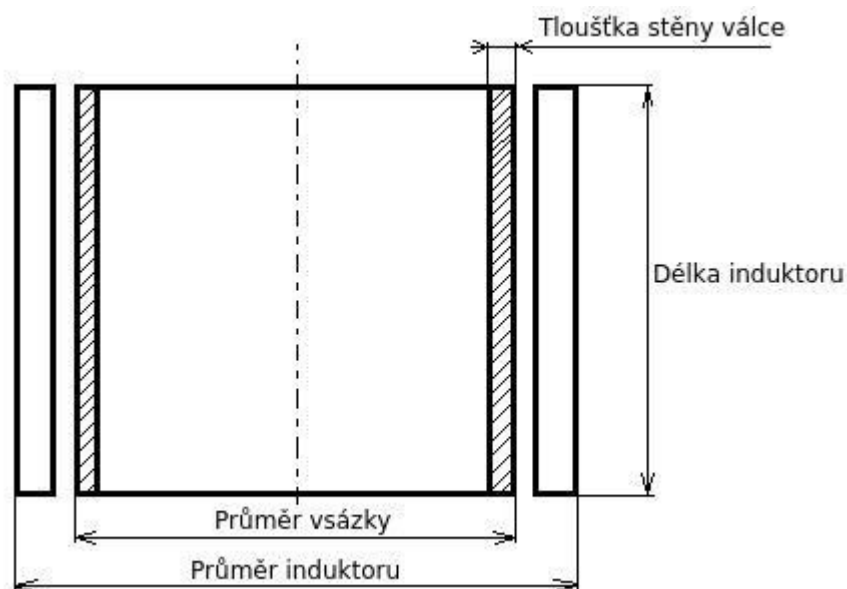
Dosazením rovnic (2.32) a (2.33) do rovnic (2.28) a (2.29) a dostaneme:

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{H}}{\partial r} = j\omega \gamma \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{E}}{\partial r} = j\omega \gamma \mu_0 \mu_r \vec{E} \quad (2.35)$$

### 2.1.4. Volba tvaru vsázek a parametrů pro výpočet

Abychom mohli provést výpočty, je třeba určit pevně dané parametry podle kterých se budeme ve výpočtech řídit. Těmito parametry jsou frekvence ohřevu, tvar vsázky a materiál, ze kterého vsázka bude vyrobena. Tvarem vsázky bude dutý válec znázorněný na Obr. 2.2



Obr. 2.2 Znázornění veličin induktoru a vsázky

Délka induktoru bude stejná jako délka vsázky. Mezi induktorem a vsázkou bude mezera 5mm. Materiálem vsázky bude železo, u kterého předpokládáme konstantní relativní permeabilitu  $\mu_r=400$  po celou dobu ohřevu a  $\gamma=57 \cdot 10^5 \text{ Sm}^{-1}$ . Induktorem bude procházet konstantní proud 75 A. Frekvence bude 4400 Hz tedy se bude jednat o středofrekvenční zařízení.

## 2.2. Výpočet Poyntingova vektoru

Pro určení hodnoty  $E$  a  $H$  použijeme rovnice (2.8) a (2.9), které budou platit pro vodivé prostředí ( $\epsilon_r = 0$ ) a za  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$  dosadíme  $j \omega \vec{E}, j \omega \vec{H}$ . Po úpravě dostaneme dostanou rovnice tento tvar:

$$\text{rot } \vec{H} = \gamma \vec{E} \quad (2.1)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \mu_r j \omega \vec{H} \quad (2.2)$$

Nyní je třeba určit počáteční podmínky. První počáteční podmínku určíme z 2. Maxwellovy rovnice v integrálním tvaru:

$$\oint H dl = \sum I \quad (2.3)$$

, kde

$l$  je dráha obepínající plochu, kterou prochází suma proudů [m]

$H$  magnetická intenzita vyvolaná sumou proudů [ $\text{Am}^{-1}$ ]

$\sum I$  suma všech proudů procházejících plochou ohraničenou dráhou  $l$  [A]

Tento integrál můžeme nahradit rovnicí (2.4), jelikož integrační dráha obepíná všechny závitů a tvoří trojúhelník. V tomto případě se počítá pouze se stranou tohoto obdélníka nejbližší vsázce, protože na ostatních stranách je kolmá k magnetické intenzitě či tam žádná intenzita není.

$$\vec{H} = I \frac{N}{l} \quad (2.4)$$

, kde

$N$  je počet závitů [-]

$l$  je rovna délce induktoru [m]

Jelikož intenzita magnetického pole na povrchu vsázky je stejná jako na vnitřním povrchu induktoru, tak můžeme rovnici (2.4) považovat jako první počáteční podmínku.

Druhou počáteční podmínku určíme ze vztahu:

$$\vec{E} = \frac{U}{d} \quad (2.5)$$

, kde

$U$  je napětí [V]

$d$  je délka, na které je toto napětí [m]

Pokud nás bude zajímat činný výkon jdoucí do vsázky, je výhodné zavedení pojmu zářivého vektoru. Výhodné zavedení je to, jelikož je možné ho použít při pronikání elektromagnetického vlnění do vodivé stěny, kde se pohlcená elektromagnetická energie mění na teplo. Poyntingův vektor zářivý vektor  $\mathbf{S}$  [ $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ] udává směr a hustotu toku elektromagnetické energie v prostoru za jednotku času. Aby bylo možné odvodit hodnotu vektoru  $\mathbf{S}$  v závislosti na intenzitě elektrického  $\mathbf{E}$  a magnetického  $\mathbf{H}$  pole v uvažovaném bodě, vyjdeme z definice množství elektromagnetické energie v jednotkovém objemu prostoru.

Hledaný Poyntingův vektor odvodíme ze záporného časového vzrůstu celkového množství energie v uvažovaném objemu. Množství elektrické  $W_e$  a magnetické  $W_m$  energie v určitém objemu prostoru je dáno vztahy:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \vec{E} dV = \frac{1}{2} \epsilon \int \vec{E}^2 dV \quad (2.6)$$

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \vec{H} dV = \frac{1}{2} \mu \int \vec{H}^2 dV \quad (2.7)$$

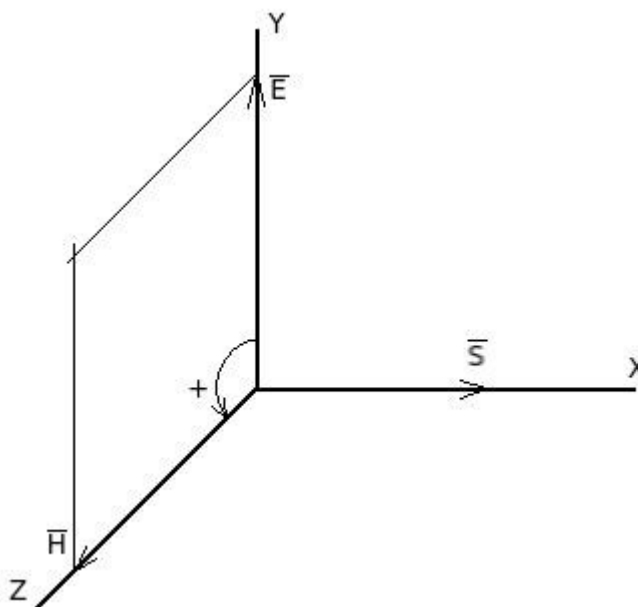
V každém bodě je hustota elektromagnetické energie časově proměnná, naopak amplitudy  $H$  a  $E$  jsou konstantní. Podle této skutečnosti je množství elektromagnetické energie ubrané z uvažovaného objemu  $V$  za čas  $t$  úměrné tomuto času. Proto je derivace podle času rovna množství energie, která ubude za jednu sekundu. Po matematických úpravách dostaneme ke hledanému vztahu Poyntingova vektoru:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (2.8)$$

,kde

$\vec{S}$  je Poyntingův vektor [ $W \cdot m^{-2}$ ]

Z výrazu (2.8) je viditelné jak je elektromagnetické pole, určené složkami  $\vec{E}$  a  $\vec{H}$ , svázáno s tokem elektromagnetické energie v prostoru. Velikost vektoru  $\vec{S}$  určuje množství energie, které proteče za jednu sekundu jednotkovou plochou, kolmou ke směru šíření.



Obr.2.3 Vzájemná orientace vektorů v kartézských souřadnicích [4]

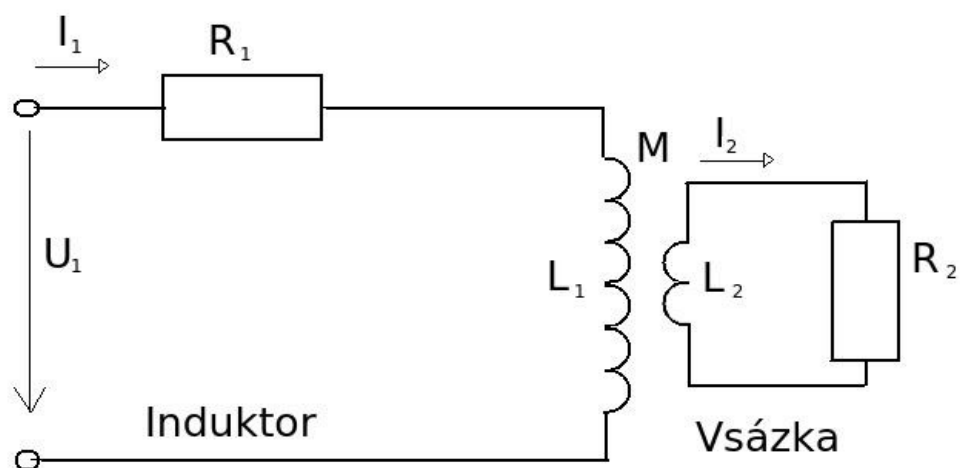


Fázor zářivého vektoru  $\mathbf{S}$  je obecně dán vektorovým součinem fázorů  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{H}$ . Jeho velikost je dána plošným obsahem rovnoběžníku, určeného vektory  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{H}$  v prostoru. Směr zářivého vektoru  $\mathbf{S}$  je kolmý k ploše a jeho smysl je takový, že při pohledu proti smyslu  $\mathbf{S}$  se jeví otočení od  $\mathbf{E}$  k  $\mathbf{H}$  v kladném smyslu dle Obr. 2.3.

## 2.3. Výpočet pomocí náhradního schématu

### 2.3.1. Pro plnou vsázku

Druhou metodu, kterou si uvedeme je výpočet pomocí náhradního schématu. Schéma tvoří dva indukčně spřažené obvody. Primární obvod tvoří induktor (ohřívací cívka) a sekundární obvod tvoří vsázka.



Obr. 2.4 Náhradní schéma indukčního ohřevu

, kde

- $U_1$  je napětí na svorkách ohřívací cívky [V]
- $I_1$  je proud tekoucí induktorem [A]
- $R_1$  je činný odpor ohřívací cívky [ $\Omega$ ]
- $L_1$  je indukčnost ohřívací cívky [H]
- $M$  je vzájemná indukčnost ohřívací cívky a vsázky [H]
- $L_2$  je indukčnost vsázky [H]
- $R_2$  je činný odpor vsázky [ $\Omega$ ]
- $I_2$  je proud tekoucí vsázkou [A]

Schéma popíšeme obvodovými rovnicemi:

$$R_1 \vec{I}_1 + j \omega L_1 \vec{I}_1 + j \omega M \vec{I}_2 = \vec{U}_2 \quad (2.9)$$

$$R_2 \vec{I}_2 + j \omega L_2 \vec{I}_2 + j \omega M \vec{I}_1 = 0 \quad (2.10)$$

,kde

$\omega$  je kmitočet napájecího napětí [ $s^{-1}$ ]

Schéma jde zjednodušit tak, že obvodové rovnice (2.9) a (2.10) zjednodušíme na jednu, kde bude pouze proud  $I_1$  a napětí  $U_1$ . Začneme tím, že z rovnice (2.10) vyjádříme proud  $I_2$ :

$$\vec{I}_2 = \frac{j \omega L_1 \vec{I}_1}{R_2 + j \omega L_2} \quad (2.11)$$

Nyní rovnici (2.11) dosadíme do obvodové rovnice (2.9)

$$R_1 \vec{I}_1 + j \omega L_1 \vec{I}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j \omega L_2} \vec{I}_1 = \vec{U}_1 \quad (2.12)$$

Pro výpočet impedance indukčního ohřevu vůči napájení lze dosáhnout úpravou rovnice (2.12) tak, že si na jedné straně rovnice vyjádříme poměr napětí na svorkách ohřívací cívky a

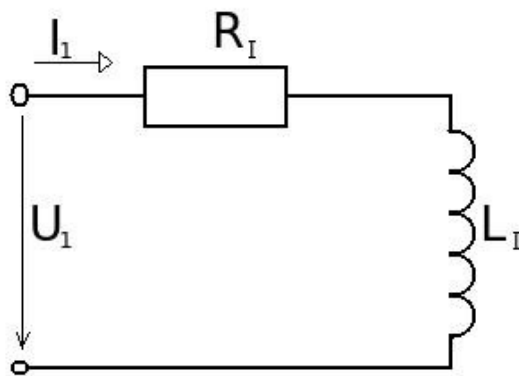
proudu tekoucího induktorem, tedy  $\frac{\vec{U}_1}{\vec{I}_1}$ .

$$\frac{\vec{U}_1}{\vec{I}_1} = Z_1 = R_1 + j \omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j \omega L_2} \quad (2.13)$$

Pro názornost je třeba v rovnici (2.13) oddělit reálnou a imaginární část impedance  $Z_1$ , aby se objasnilo jak se transformuje sekundární obvod na primární. Tuto úpravu provedeme rozšířením zlomku komplexně sdruženým číslem k jmenovateli. Tedy výrazem  $R_2 - j \omega L_2$  a upravíme.

$$Z_1 = R_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} R_2 + j \omega \left( L_1 - \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} L_2 \right) \quad (2.14)$$

Z upravené rovnice (2.14) lze vyčíst, že činný odpor vsázky  $R_2$  se transformuje kladně zato indukčnost vsázky  $L_2$  záporně. Tedy indukčnost klesne a odpor primárního obvodu se zvětší. Po transformaci si můžeme zobrazit zjednodušené schéma indukčního ohřevu znázorněné na obr. 2.5.



Obr. 2.5 Zjednodušené náhradní schéma  
indukčního ohřevu

, kde 
$$R_I = R_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} R_2$$

$$L_I = L_1 - \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} L_2$$

Před  $L_2$  a  $R_2$  je stejný výraz, který vyjadřuje tzv. Transformační převod, který označíme písmenem  $p^2$ . Transformační převod je roven poměru absolutních hodnot mezi proudem tekoucím vsázkou a proudem protékajícím induktorem. Na základě geometrických rozměrů induktoru a vsázky lze určit hodnoty  $R_1$  a  $L_1$  a podle nich dále dopočítat jakoukoli veličinu, která nás bude zajímat. Nás zajímá činný výkon jdoucí do vsázky.

Budeme předpokládat, že induktor má jen jeden závit o velikosti jako celé vinutí. Toto je provedeno z důvodu zjednodušení výpočtu jednotlivých parametrů. Tyto veličiny označíme indexem „(1N)“ (např.  $L_{1(1N)}$ ). Platí tedy vztahy:

$$p = N p_{(1N)} \quad (2.15)$$

$$I_{1(1N)} = N I_1 \quad (2.16)$$

$$P_2 = p_{(1N)}^2 R_2 I_{1(1N)}^2 \quad (2.17)$$

,kde

$p$  je převod ještě před tím než byl induktor uvažován jako jednozávitový [-]

$N$  je počet závitů cívky [-]

$p_{(1N)}$  je převod pro transformaci vinutí na jeden závit [-]

$P_2$  je činný výkon jdoucí do vsázky

Abychom mohli vypočítat činný výkon jdoucí do vsázky pomocí rovnice (2.17), je třeba určit velikosti hodnot  $R_{1(IN)}$ ,  $L_{2(IN)}$ ,  $R_2$  a  $p_{(IN)}$ . Tyto veličiny určíme v následujících podkapitolách.

### 2.3.1.1. Určení odporu $R_{1(IN)}$

Nyní budeme uvažovat jednozávitovou cívku, která bude mít poloměr mnohonásobně větší než hloubka vniku  $a$ . Hloubka vniku je vzdálenost, kde se amplituda veličin pole utlumí  $e$ -krát. Je definována jako:

$$a = \sqrt{\frac{2}{\omega \gamma \mu_0 \mu_r}} \quad (2.18)$$

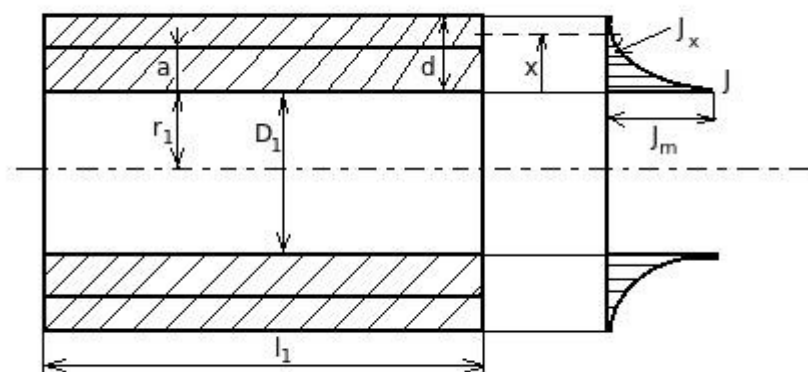
,kde

$\omega$  je kmitočet napájecího napětí [ $s^{-1}$ ]

$\mu_r$  je poměrná permeabilita [ $Hm^{-1}$ ]

$\mu_0$  je permeabilita vakua, tedy  $4 * \pi * 10^{-7}$  [ $H * m^{-1}$ ]

$\gamma$  je měrná elektrická vodivost [ $S * m^{-1}$ ]



Obr. 2.6 Průběh hustoty proudu v jednozávitové válcové cívce [2]

V pravé části Obr. 2.6 je znázorněno jak proudová hustota směrem ven z dutiny klesá exponenciálně. Proudovou hustotu můžeme vyjádřit vztahem:

$$J = J_m e^{\frac{-x}{a}} \quad (2.19)$$

,kde

$x$  je vzdálenost proudové hustoty od místa nejvyšší proudové hustoty  $J_m$ .

Z průběhu proudové hustoty je jasné, že je rozložena nerovnoměrně. My ji můžeme nahradit rovnoměrnou hustotou proudu procházející pouze hloubkou vniku  $a$ . Odpor takového vodiče lze získat takto:

$$R = \frac{l}{\gamma a l_1} \quad (2.20)$$

,kde

$a$  je hloubka vniku [m]

$\gamma$  je konduktivita, neboli měrná vodivost [ $\text{Sm}^{-1}$ ]

$l$  je délka stěny ve směru toku proudu [m]

$l_1$  je šířka stěny [m]

Odpor jednoho závitu  $R_{1(N1)}$ , který je z vodiče průřezu  $a \cdot l_1$  a to ve všech případech, kdy je tloušťka vodiče  $d \geq$  hloubka vniku  $a$ . Pokud by nastal případ, kdy by tloušťka vodiče byla menší než hloubka vniku, tak v rovnici (2.20) nahradíme hloubku vniku  $a$  tloušťkou vodiče  $d$ . Výsledný odpor ještě vzroste, jelikož v reálné cívce jsou mezery mezi závity. Tyto mezery způsobí 1.04 až 1.2 krát zvětšení odporu. Musíme tedy rovnici (2.20) vynásobit činitelem  $k$ :

$$R_{1(1N)} = k \frac{l}{\gamma a l_1} \quad (2.21)$$

### 2.3.1.2. Určení indukčnosti $L_{1(1N)}$

Stejně jako u výpočtu odporu  $R_{1(1N)}$  můžeme i zde počítat indukčnost prázdné cívky tak, že budeme uvažovat, že všechny proud  $I_{1(1N)}$  bude téct pouze hloubkou vniku  $a$ . Dále si výpočet indukčnosti zjednodušíme předpokladem, že všechny proud  $I_{1(1N)}$  bude téct středem hloubky vniku  $a$ .

Když budeme brát v úvahu výše uvedená zjednodušení, tak podle Obr. 2.6 bude platit:

$$L_{1(1N)} = \mu_0 \mu_r \frac{A_1}{l_1} \alpha_1 \quad (2.22)$$

,kde

$\mu_r$  je poměrná permeabilita [-]

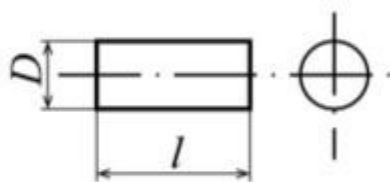
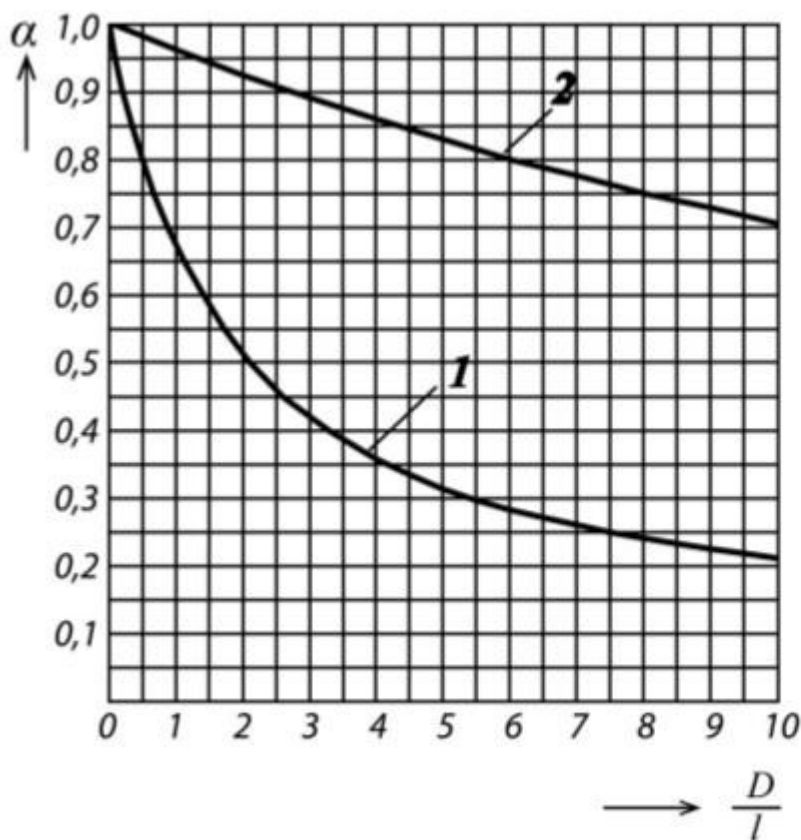
$\mu_0$  je permeabilita vakua, tedy  $4 * \pi * 10^{-7}$  [H\*m<sup>-1</sup>]

$A_1$  je plocha průřezu dutiny cívky, která v sobě zahrnuje i plochu vymezenou polovinou hloubky vniku  $a$

$l_1$  je osová délka cívky

$\alpha_1$  je koeficient zahrnující v sobě vliv tvaru průřezu cívky a rozměrových poměrů. Pro relativně velmi dlouhé vinutí ( $l_1 \rightarrow \infty$ ) vzhledem k ostatním rozměrům (průměru apod.) je  $\alpha_1 = 1$ . Čím je  $l_1$  relativně menší, tím klesá i  $\alpha_1$ . Je tedy  $\alpha_1$  menší než 1. [2]

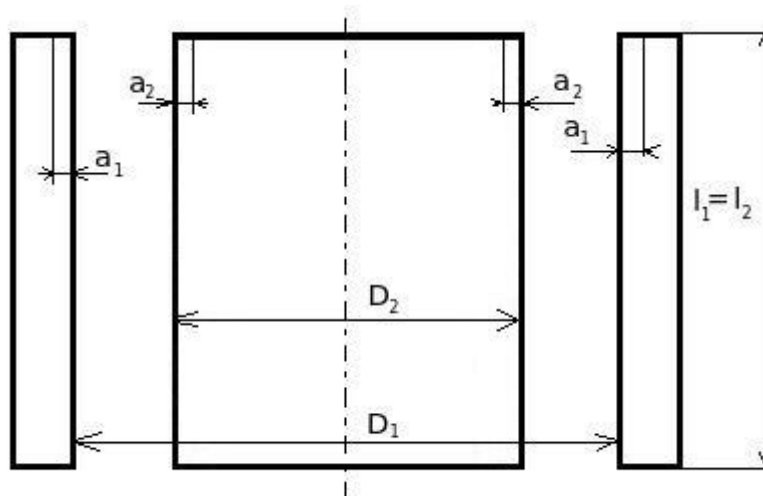
Velikost tohoto koeficientu je uvedena v diagramu Obr. 2.7 [9]



Obr. 2.7 Součinitel  $\alpha$  pro různé tvary cívek [9]

### 2.3.1.3. Určení parametrů $p$ , $L_2$ a $R_2$

Pro určení těchto hodnot jsou dva způsoby výpočtu. V prvním způsobu určení hodnot se využívá Poyntingův vektor. Druhá metoda je vhodná pouze pro jednu vsázku s homogenními a magnetickými vlastnostmi. Dále je třeba, aby hloubka vniku  $a_1$  byla u cívky i vsázky menší než jejich průměr. V této kapitole bude uvedena pouze druhá metoda výpočtu, jelikož tyto metody jsou vhodné pouze pro výpočty s plnou válcovou vsázkou a v praktickém výpočtu bude řešen případ se vsázkou dutou válcovou. Geometrické rozměry a uspořádání induktoru a vsázky je na Obr. 2.8 .



Obr. 2.8 Geometrické uspořádání vsázky a induktoru

,kde

$a_1$  je hloubka vniku v induktoru [m]

$a_2$  je hloubka vniku vsázky [m]

$D_1$  je vnitřní průměr induktoru [m]

$D_2$  je průměr vsázky [m]

$l_1$  je délka induktoru [m]

$l_2$  je délka vsázky [m]

Nyní pro výpočet veličin použijeme vztahy uvedené v předchozích podkapitolách.

Pro výpočet  $R_2$  použijeme vztah (2.20), kde dosadíme za  $l_1$  délku induktoru a za  $l$  dosadíme  $(D_2 - a_2)\pi$ . Tedy dostaneme vztah:

$$R_2 = \frac{(D_2 - a_2)\pi}{\gamma a_2 l_1} \quad (2.23)$$

Pro výpočet  $L_2$  použijeme vztah (2.22), kde za  $A_1$  dosadíme  $\frac{\pi(D_2 - a_2)}{4}$  a za  $l_1$  dosadíme  $l_2$  z Obr. 2.8 a dostaneme vztah:

$$L_2 = \mu_0 \mu_r \frac{(D_2 - a_2)^2 \pi}{4 * l_2} \quad (2.24)$$

Pro výpočet vzájemné indukčnosti  $M_{1(IN)}$  použijeme vzorec:

$$M_{1(IN)} = \mu_0 \frac{\pi(D_2 - a_2)}{4 * l_2} F \quad (2.25)$$

,kde

$F$  je činitel pro výpočet vzájemné indukčnosti dvou válcových cívek jako

funkce poměrů  $\frac{D_1 + a_1}{l_1}, \frac{D_2 - a_2}{l_2}, \frac{l_1}{l_2}$  vyjádřený v tabulce viz. [2]

Když máme vypočteny hodnoty  $R_2$ ,  $L_2$  a  $M_{1(IN)}$ , je možné spočítat  $p_{1(IN)}$  pomocí vztahu:

$$p_{1(IN)} = \sqrt{\frac{\omega^2 M_{1(IN)}^2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}} \quad (2.26)$$

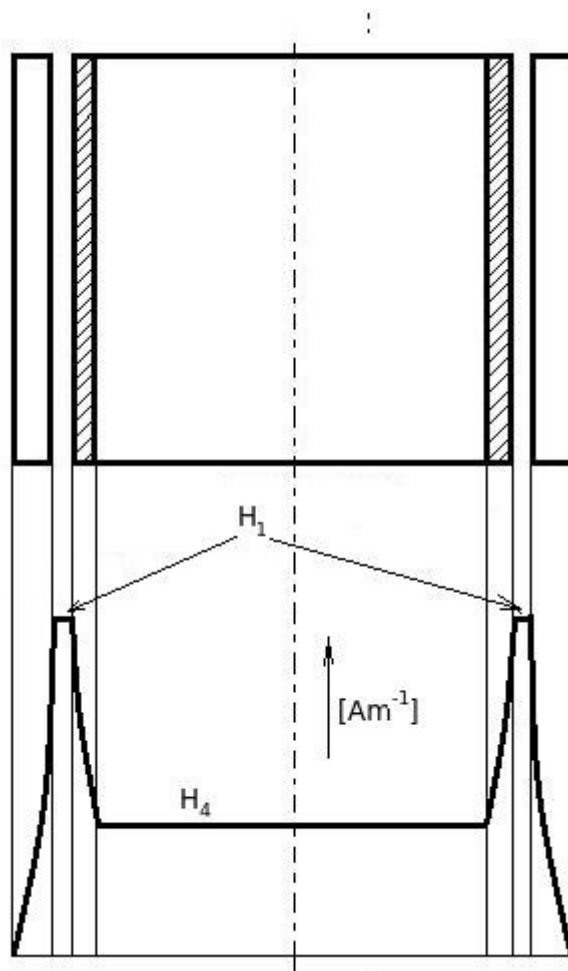
Nyní lze spočítat činný výkon jdoucí do vsázky dle vztahu (2.17), kterého ještě dosadíme (2.16) a dostaneme:

$$P_2 = p_{1(IN)}^2 R_2 N I_1 \quad (2.27)$$

### 2.3.2. Pro dutou vsázku

V kapitole (2.3.1) jsme se zabývali metodou výpočtu indukčního ohřevu pro plnou válcovou vsázku. Ovšem v našem případě máme válcovou vsázku dutou. Pro toto geometrické uspořádání má metoda náhradního schématu jiný postup výpočtu. V náhradním schématu je rozdíl proti tomu v kapitole (2.3.1) v tom, že k rezistoru a induktoru je paralelně přidán kapacitor. Viz. Obr. 2.10





Obr. 2.9 Magnetické pole v cívkce, v mezeře, ve stěně a dutině vsázky [4]

Nejdříve je třeba určit hodnotu parametrů  $E$  a  $H$ . Tyto hodnoty určíme pomocí vztahů odvozených v kapitole 2.1.3. Dále je nutné vypočítat magnetické toky, které jsou vytvořeny proudem pocházejícím cívkou.

Tok v mezeře mezi cívkou a vsázkou:

$$\Phi_1 = \pi(r_1^2 - r_2^2) \mu \vec{H}_1 \quad (2.28)$$

Tok ve vsázce:

$$\Phi_2 = 2\pi\mu \int_{r_4}^{r_2} \vec{H} r dr \quad (2.29)$$

Tok v dutině vsázky:

$$\Phi_4 = \pi r_4^2 \mu \vec{H}_4 \quad (2.30)$$

Po výpočtu magnetických toků můžeme vypočítat indukované napětí:

$$U_{ind} = j\omega N_1 \mu_0 (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_4) \quad (2.31)$$

,kde

$\mu_0$  je permeabilita vakua, tedy  $4 * \pi * 10^{-7}$  [H\*m<sup>-1</sup>]

$N_1$  je počet závitů cívky [-]

Abychom mohli spočítat napětí na induktoru, je třeba si vypočítat odpor drátu vinutí:

$$R_{vin} = \frac{2\pi \left(r_1 + \frac{d_{vin}}{2}\right) N_1}{\gamma_{mat} \frac{\pi d_{vin}^2}{4}} \quad (2.32)$$

,kde

$d_{vin}$  je průměr drátu vinutí [m]

$\gamma_{mat}$  je měrná vodivost materiálu vinutí induktoru [Sm<sup>-1</sup>]

$r_1$  je poloměr vsázky plus vzdálenost mezi vsázkou a induktorem [m]

Poté je třeba vypočítat napětí na cívce:

$$U_{vin} = I R_{vin} \quad (2.33)$$

Nyní je již možné určit napětí na induktoru a to součtem rovnic (2.31) a (2.33). Tedy:

$$U_L = U_{ind} + U_{vin} \quad (2.34)$$

Když známe napětí a proud, můžeme začít s výpočtem jednotlivých prvků v náhradním schématu. Začneme s výpočtem impedance obvodu.

$$\hat{Z} = \frac{U_L}{I} \quad (2.35)$$

Z vypočtené impedance lze určit hodnotu rezistoru a induktoru. Hodnota rezistoru je reálnou částí impedance a hodnota induktoru je imaginární část impedance lomená úhlovou rychlostí.

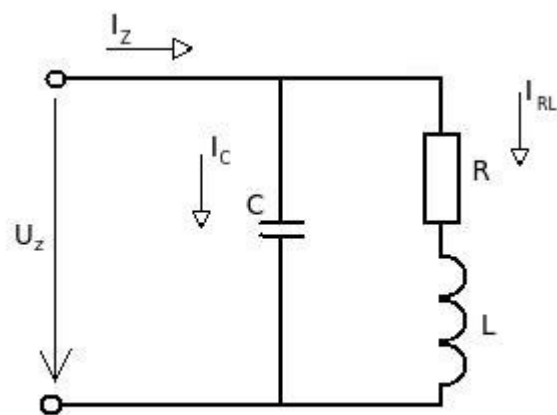
$$R = \text{Re } \hat{Z} \quad (2.36)$$

$$L = \frac{\text{Im } \hat{Z}}{\omega} \quad (2.37)$$

Hodnotu kapacitoru dostaneme ze vztahu:

$$C = \frac{I^2 \operatorname{Im} \hat{Z}}{\omega |U_L|^2} \quad (2.38)$$

Když jsou hodnoty všech prvků známy, je možné vypočítat hodnoty proudů. Ty vypočítáme pomocí obvodových rovnic. Rovnice sestavíme podle Obr. 2.11.



Obr.2.11 Zobrazení proudů v náhradním obvodu

Tyto rovnice budou mít tvar:

$$U_z = R I_{LR} + j \omega L I_{LR} \quad (2.39)$$

$$U_z = \frac{1}{j \omega C} I_c \quad (2.40)$$

$$I_z = I_c + I_{LR} \quad (2.41)$$

Vyřešením této soustavy vypočítáme neznáme hodnoty proudů  $I_c$ ,  $I_z$  a  $I_{RL}$ .

## 2.4. Výpočet teplotního pole

### 2.4.1. Obecná rovnice teplotního pole

Základní rovnicí pro sdílení tepla je rovnice Fourier-Kirchhoffova rovnice:

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + Q_v \quad (2.42)$$

,kde

$\rho$  je hustota [ $\text{Kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ]

$C_p$  je měrná tepelná kapacita při stálém tlaku [ $\text{J} \cdot \text{Kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ]

$v$  je rychlost [ $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ]

$\lambda$  je tepelná vodivost [ $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ]

$Q_v$  je teplo z vnějších tepelných zdrojů [ $\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$ ]

$T$  je termodynamická teplota [ $\text{K}$ ]

$t$  je čas [ $\text{s}$ ]

$\nabla$  je Hamiltonův operátor „nabla“ [ $\text{m}^{-1}$ ]

V rovnici (2.42) můžeme zanedbat rychlost, jelikož se pozorovatel vůči soustavě nepohybuje. Dále budeme brát v potaz, že je  $\lambda$  konstantní v celém povrchu. Za těchto okolností upravíme rovnici (2.42):

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T + Q_v \quad (2.43)$$

Z tohoto tvaru Fourier-Kirchhoffovy rovnice již můžeme vypočítat teplotu  $T$  v závislosti na čase a poloměru. Avšak ještě bude třeba určit velikost  $Q_v$ .

$$Q_v = \gamma |E^2| \quad (2.44)$$

,kde

$E$  je intenzita elektrického pole [ $\text{Vm}^{-1}$ ]

$\gamma$  je elektrická vodivost [ $\text{Sm}^{-1}$ ]

Abychom mohli Fourier-Kirchhoffovu rovnici úspěšně vyřešit je třeba nadefinovat okrajové podmínky.

### 2.4.2. Okrajové a počáteční podmínky

Okrajové podmínky se používají na hranicích  $\Gamma$  nejčastěji ve tvaru

#### **Dirichletovy** (I. druhu)

Aplikujeme je v případech, kde je hranice tvořena izotermou či známe teplotu povrchu.

$$T(\Gamma, t) = T_\Gamma(\Gamma, t) \quad (2.45)$$

#### **Neumannovy** (II. druhu)

Tyto podmínky představují bilanci tepelného toku s příslušnou hranicí. Tato podmínka se používá např. Při geometrické symetrii.

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = q_n \quad (2.46)$$

,kde

$q(\Gamma, T, t)$  je hustota tepelného toku [ $\text{Wm}^{-2}$ ]

#### **Newtonovy** (III. druhu)

Podmínky reprezentující přestup tepla konvekcí do prostředí o teplotě  $T_{\text{out}}$ .

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T - T_{\text{out}}) \quad (2.47)$$

,kde

$\alpha(\Gamma, T, t)$  je součinitel přestupu tepla z jednoho prostředí do druhého [ $\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ ]

Odtud lze jako speciální případ vyjádřit:

zadanou teplotu povrchu  $\alpha \rightarrow \infty$ ,

geometrickou symetrii  $\alpha = 0$

#### **Ostatní** (IV. druhu)

Při uvažování šíření tepla sáláním se uplatňuje větší počet zákonů, které tento způsob šíření tepla zohledňují (Snellův, Stefan-Boltzmannův, Lambertův, Planckův, Wienův nebo Kirchhoffův). My si zde uvedeme zákon Stefan-Boltzmannův, jelikož se běžně vyskytuje v praxi.

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \epsilon C (T^4 - T_{out}^4) \quad (2.48)$$

,kde

$\epsilon$  je součinitel sálání černého tělesa  $\epsilon = 5,6697 \cdot 10^{-8} \text{ [Wm}^{-2}\text{K}^{-1}\text{]}$

$C$  je součinitel emisivity ( $0 \leq C \leq 1$ ) [-]

### Počáteční podmínka

Zadáva se nejčastěji ve tvaru:

$$T(r, t_{start}) = T_0(r) \quad (2.49)$$

,kde

$T_0$  je hodnota teploty v daném místě v počátečním okamžiku vyšetřování teplotního pole

## 2.5. Metoda konečných prvků

Metoda, která se využívá při řešení nejen okrajových úloh pro stacionární elektrická a magnetická pole. Zkratkou této metody je FEM, což je zkratka z anglického názvu Finite Element Method, což odpovídá českému názvu. Je možné značení i podle českého názvu, tedy MKP.

### 2.5.1. Matematická definice FEM

Matematická podstata FEM spočívá v tzv. diskretizaci úlohy, která je opakem kontinuálního řešení. Což znamená, že hledání neznámých funkcí v oblasti  $\Omega$  s hranicí  $\Gamma$  je nahrazeno hledáním konečného počtu hodnot těchto funkcí nebo parametrů, z nichž lze zkonstruovat přibližné řešení.

Tímto způsobem postupovaly i starší metody:

Klasické variační metody, které hledaly součinitele předem zvolených funkcí, které měly obecně nenulové hodnoty v celé oblasti  $\Omega$ .

Metoda sítí (diferenční), která nahrazovala derivace diferencemi, obecněji lineárními kombinacemi několika funkčních hodnot v uzlech sítě.

Metoda kolokační se omezovala na přibližné splnění daných podmínek v několika vybraných bodech  $\Omega$  a  $\Gamma$ .

Formálně se těmito metodami vždy převedlo analytické řešení diferenciálních rovnic na řešení soustav algebraických lineárních rovnic. Stejně je tomu i v případě FEM. Ovšem pokrok oproti předešlým metodám je ve způsobu tohoto převodu. Matematicky řečeno volbě базových funkcí, do kterých rozkládáme hledané funkce. Tento rozklad úzce vážeme na rozdělení oblastí  $\Omega$  na podoblasti  $\Omega_e$ , které nazýváme konečné prvky na rozdíl od „nekonečně malých diferenciálů“  $d\Omega$ ,  $d\Gamma$  přesné analýzy. [7]

Přesná matematická definice FEM:

*„FEM je zobecněná Ritz-Galerkinova variační metoda, užívající базových funkcí s malým kompaktním nosičem, úzce spjatým se zvoleným rozdělením řešené oblasti na konečné prvky“* [7 str. 21]

## 2.5.2. Obecnější tvar FEM

Pokud se budeme blíže zabývat aditivností daného funkcionálu

$$\Pi = \sum_e \Pi_e$$

případně řešením omezeného integrálu v oblasti

$$\Omega = \sum_e \Omega_e$$

potom,

$$I = \int_{\Omega} \dots d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} \dots d\Omega_e \quad (2.50)$$

je jedinou podmínkou pro sestavování výpočtů součinitelů neznámých a absolutních členů vyvinutých pomocí FEM. Z tohoto důvodu se FEM používá i na úlohy, u kterých nelze definovat žádnou veličinu povahy  $\Pi$ , ale známe diferenciální rovnice  $\mathbf{L}_1(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  v oblasti  $\Omega$  a okrajové podmínky  $\mathbf{L}_2(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  na její hranici  $\Gamma$ , kterým musí funkce  $u$ , kterou hledáme, vyhovět. Může také jít o vektorovou funkci  $\mathbf{u} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots]^T$ , potom je také více rovnic  $\mathbf{L}_1$  a podmínek  $\mathbf{L}_2$ , zapsaných maticovým označením. Dále lze tedy opět parametrizovat úlohu  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{U}\mathbf{a}$  nebo přímo  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{V}\Delta$  s neznámými součiniteli  $\mathbf{a}$  či parametry  $\Delta$ . Pokud dosadíme určitý soubor hodnot  $\mathbf{a}$  či  $\Delta$  do předešlých rovnic, tyto rovnice nebudou přesně splněny, protože na pravé straně nevyjdou identicky nuly, ale nějaké funkce  $\Omega$  a  $\Gamma$ , které můžeme nazvat „residuum  $\epsilon_1$  a  $\epsilon_2$ “, což jsou obecně vektorové funkce:

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{u} = \epsilon_1 \neq \mathbf{0} \text{ v } \Omega \quad (2.51)$$

$$\mathbf{L}_2 \mathbf{u} = \epsilon_2 \neq \mathbf{0} \text{ na } \Gamma \quad (2.52)$$

nyní lze využít princip vážených residuí. Základní úvaha pro jednu neznámou funkci je taková, že pro přesné řešení  $u$  jsou residua (2.51), (2.52) identicky nulová, proto jsou také identicky nulové součiny  $\epsilon_1 g_1$  v  $\Omega$  a  $\epsilon_2 g_2$  v  $\Gamma$  při libovolných „váhových funkcích“  $g_1$  v  $\Omega$  a  $g_2$  v  $\Gamma$ . Omezený integrál z identické nuly má přesně nulovou hodnotu, proto pro přesné řešení  $u$  a libovolné „váhy“  $g_1$ , musí platit:

$$R = \int_{\Omega} \epsilon_1 g_1 d\Omega + \int_{\Gamma} \epsilon_2 g_2 d\Gamma = 0 \quad (2.53)$$

přičemž řešení podmínku (2.53) nesplní. Pokud bychom postupně dosazovali různé soubory hodnot  $\Delta$  nebo  $\mathbf{a}$  do (2.53), při pevně zvolených vahách  $g_1, g_2$  budou vycházet různé hodnoty celkové „chyby  $R$  oproti nule“, tedy např. pro určité soubory  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$  budou



vycházet  $R = -6385,51; 800,75; -1263,04; \dots -38,51$ . Absolutně nejmenší chyba  $R$  by byla např. pro soubor  $\Delta_{83615}$ , a to  $R = 0,0445996$ . Je možné, že se také najde případ, který v dané přesnosti poskytne  $R = 0$ . Potom lze tento soubor parametrů prohlásit za nejlepší ve smyslu splnění podmínky (2.53) při zvolených vahách  $g_1, g_2$  a příslušné přibližné řešení  $\hat{u}$  použijeme dále. Tento postup je lehce pochopitelný, ale prakticky zcela nepoužitelný. I v případě, že bychom abstrahovali od kontinuální možnosti změn jednotlivých parametrů  $\Delta_j$  souboru:

$$\Delta = [\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_{N-1}, \Delta_N]^T \quad (2.54)$$

a dále se omezili na uzlové body číselné osy, vyloučili technicky nesmyslné hodnoty  $\Delta_j$ , vyřešili vliv volby  $g_1, g_2$  atd. Stejně by podle (2.54) zbylo tolik souborů, že žádný počítač by nenašel nejlepší hledaný soubor v přijatelném čase.

Řešení spočívá v tom, že se  $R$  po dosazení (2.54) do (2.53) a provedení integrací (po prvních  $\Omega_e, \Gamma_e$ ) stane funkcí  $N$  parametrů  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N$ :

$$R(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_N) = 0 \quad (2.55)$$

Pokud jsou rovnice (2.51), (2.52) lineární, potom je rovnice (2.53) lineární v parametrech  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N$ . Můžeme tedy sestavit  $N$  algebraických lineárních rovnic tak, že rovnici (2.53) napíšeme  $N$ -krát s různými váhovými funkcemi  $(g_1, g_2), j = 1, 2, \dots, N$ ;

$$R_j(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N) = 0; j = 1, 2, \dots, N \quad (2.56)$$

Podle soustavy  $N$  rovnic (2.56) lze vyřešit hledané parametry  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N$ , čímž nalezneme přibližné řešení úlohy. Pokud operátory  $L_1, L_2$  nejsou lineární, rovnice (2.56) je také nelineární, což způsobí, že se musí použít např. Newton-Raphsonova metoda, ale zásadně tento fakt neomezí použitelnost postupu.[7]

### 2.5.3. Princip FEM

Metoda konečných prvků může být charakterizována jako modifikace klasických variačních metod. Princip si ukážeme na okrajovém problému  $\Omega \cup \Gamma$ , kde  $\Omega$  je regulární oblast v  $\mathbf{R}^2$ , resp.  $\mathbf{R}^3$  a  $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_I \cup \Gamma_{II}$ , popsaného rovnicemi:

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = f \text{ na } \Omega \quad (2.57)$$

$$u = g_I \text{ na } \Gamma_I \quad (2.58)$$

$$-p \frac{\partial u}{\partial n} = g_{II} \text{ na } \Gamma_{II} \quad (2.59)$$

V uvedených rovnicích  $u$  je neznámá funkce proměnných souřadnic  $x, y$  (případně  $z$ ),  $p$  na  $\Omega$  je daná konstanta, či funkce souřadnic nebo funkce pro proměnný  $|\operatorname{grad} u|$ ,  $f$  je daná

konstanta nebo funkce souřadnic definovaná na  $\Omega$ ,  $g_I$  je daná funkce (okrajová podmínka) definovaná na  $\Gamma_I$ , parciální derivace  $u$  podle  $n$  je derivace ve směru vnější normály k  $\Gamma_{II}$  po spojitěm prodloužení z  $\Omega$  do hranice  $\Gamma_{II}$  a  $p$  na  $\Gamma_{II}$  je spojitě prodloužení funkce  $p$  z oblasti  $\Omega$  do hranice  $\Gamma_{II}$ .

Rovnici (2.57) vynásobíme variací funkce  $u$ , tedy funkcí  $v = \delta u$  takovou, že platí:

$$v = 0 \text{ na } \Gamma_I \quad (2.60)$$

Vzniklou rovnici integrujeme přes oblast  $\Omega$ , z čehož dostaneme:

$$\int_{\Omega} -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) v \, d|\Omega| = \int_{\Omega} f v \, d|\Omega| \quad (2.61)$$

Levou stranu rovnice (2.61) užitím Greenovy věty upravíme:

$$\int_{\Omega} -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) v \, d|\Omega| = \int_{\Omega} p \operatorname{grad} u * \operatorname{grad} v \, d|\Omega| - \int_{\Gamma} p \frac{\partial u}{\partial n} v \, d|\Gamma| \quad (2.62)$$

Z důvodu podmínky (2.60) je

$$\int_{\Gamma} p \frac{\partial u}{\partial n} v \, d|\Gamma| = \int_{\Gamma_{II}} p \frac{\partial u}{\partial n} v \, d|\Gamma| \quad (2.63)$$

Po dosazení rovnice (2.63) do (2.62) vznikne :

$$\int_{\Omega} (p \operatorname{grad} u) v \, d|\Omega| = \int_{\Omega} p \operatorname{grad} u * \operatorname{grad} v \, d|\Omega| - \int_{\Gamma_{II}} p \frac{\partial u}{\partial n} v \, d|\Gamma| \quad (2.64)$$

Když funkce  $u$  splňuje na  $\Gamma_I$  okrajovou podmínku (2.58) a na  $\Omega \cup \Gamma_{II}$  pro funkci  $u$  platí integrální podmínka (2.64), při čemž  $v$  je libovolná funkce, která splňuje podmínku (2.60), pak se tato funkce  $u$  nazývá slabé řešení okrajového problému (2.57) a (2.59). Název slabá řešení se používá z důvodu skutečnosti, že slabé řešení okrajové úlohy nemá tak silné požadavky na hladkost vystupujících funkcí oproti klasickému řešení. [8]

### 3. Metody výpočtu pro dutou vsázku

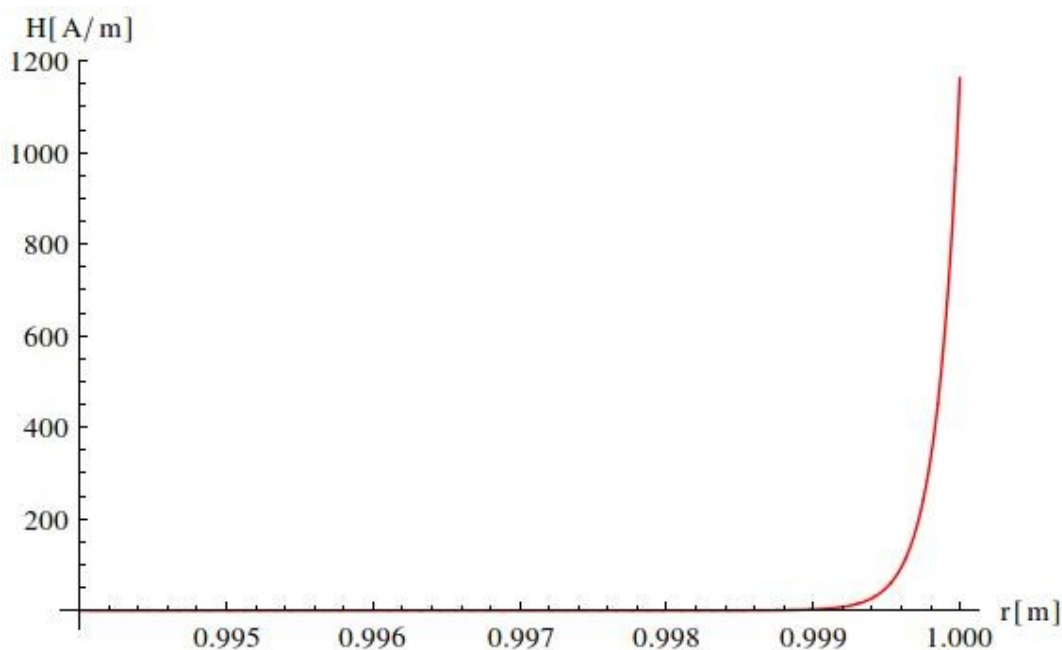
V této kapitole si uvedeme různé metody výpočtu, kterými se dá řešit indukční ohřev pro dutou vsázku. V první podkapitole bude uvedena metoda výpočtu pomocí náhradního schématu a v druhé podkapitole bude řešen model v SW Agros2D.

#### 3.1. Metoda výpočtu pomocí náhradního schématu pro dutou vsázku

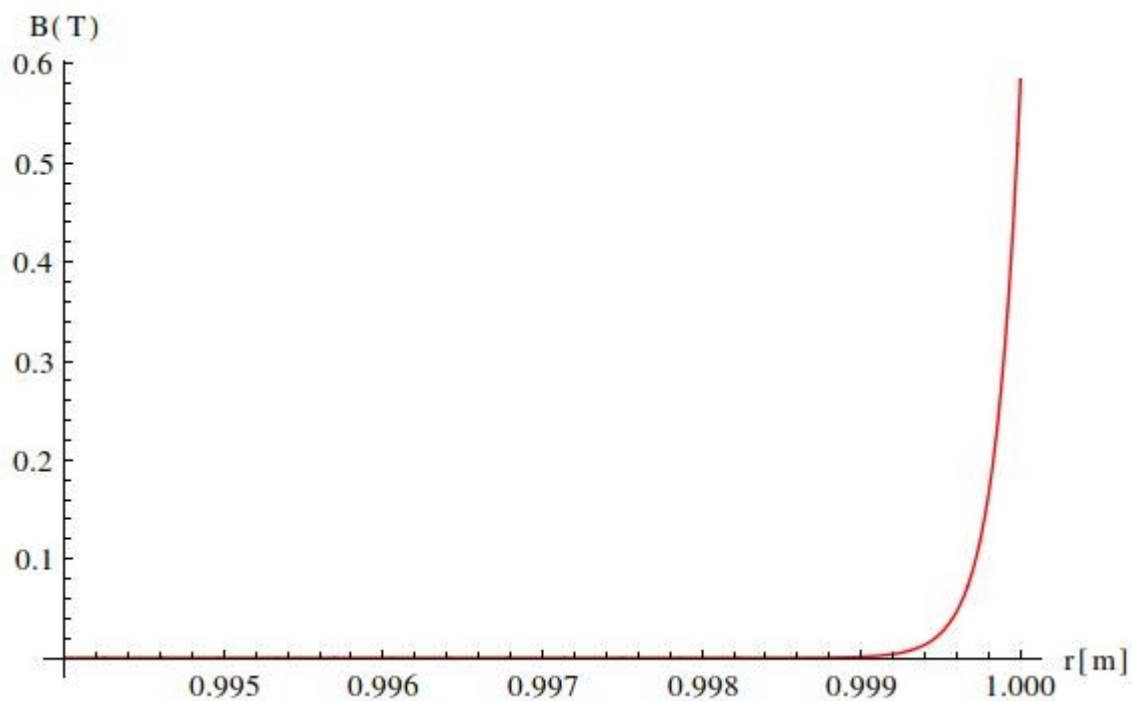
Použijeme vztahy a postup, který je popsán v kapitole 2.3.2. Tento postup budeme řešit pomocí softwaru Mathematica. Zdrojový je přiložen v příloze.

Wolfram Mathematica je nejznámější programový systém pro provádění numerických a symbolických výpočtů a vizualizaci dat. Klíčovými rysy nové verze Mathematica jsou automatizované numerické a symbolické výpočty, účinná adaptivní vizualizace, dynamická interaktivita a vysoce výkonné programovací prostředí.[13]

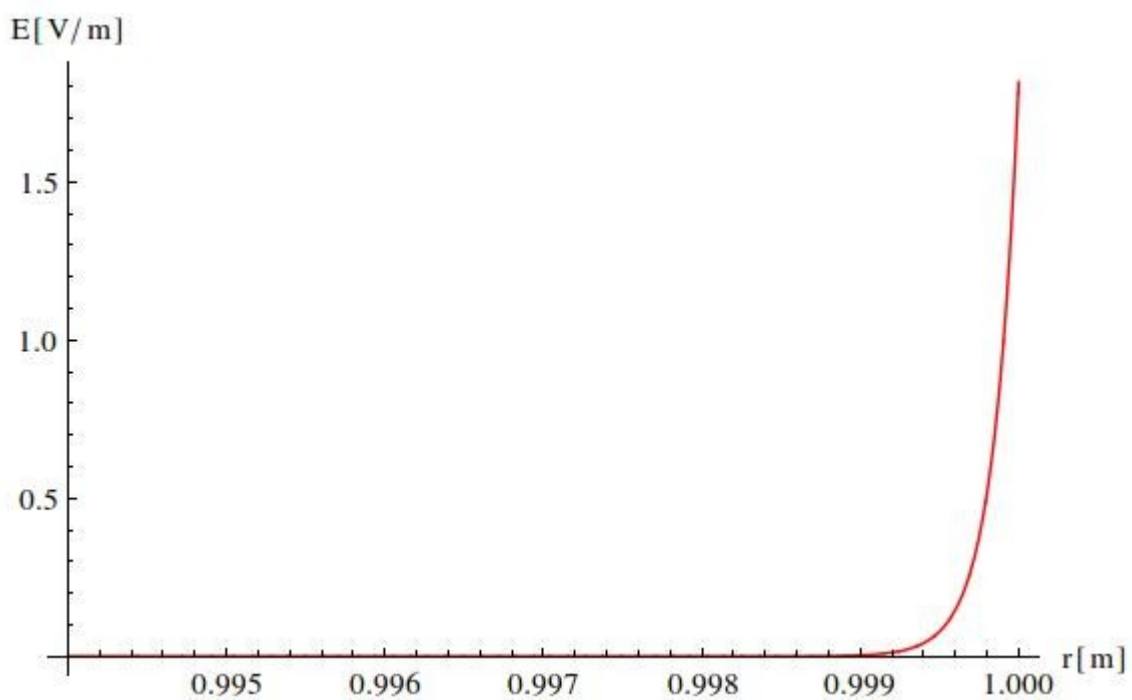
Jako první mezivýsledky dostaneme závislosti intenzity magnetického pole  $H$ , magnetické indukce  $B$  a intenzity elektrického pole  $E$  na poloměru vsázky  $r$ . Jejich průběhy jsou znázorněny na Obr. 3.1, 3.2 a 3.3.



Obr. 3.1 Závislost intenzity magnetického pole na poloměru



Obr. 3.2 Závislost magnetické indukce na poloměru



Obr. 3.3 Závislost intenzity elektrického pole na poloměru

Po vypočtení magnetických toků a následném vypočítání napětí na induktoru dopočítáme impedanci obvodu. Z této impedance dopočítáme parametry induktoru. Pro námi řešenou dutou vsázku tyto parametry vyšly:

$$R = 3.35 \text{ } [\Omega]$$

$$L = 139,59 \text{ } [\text{mH}]$$

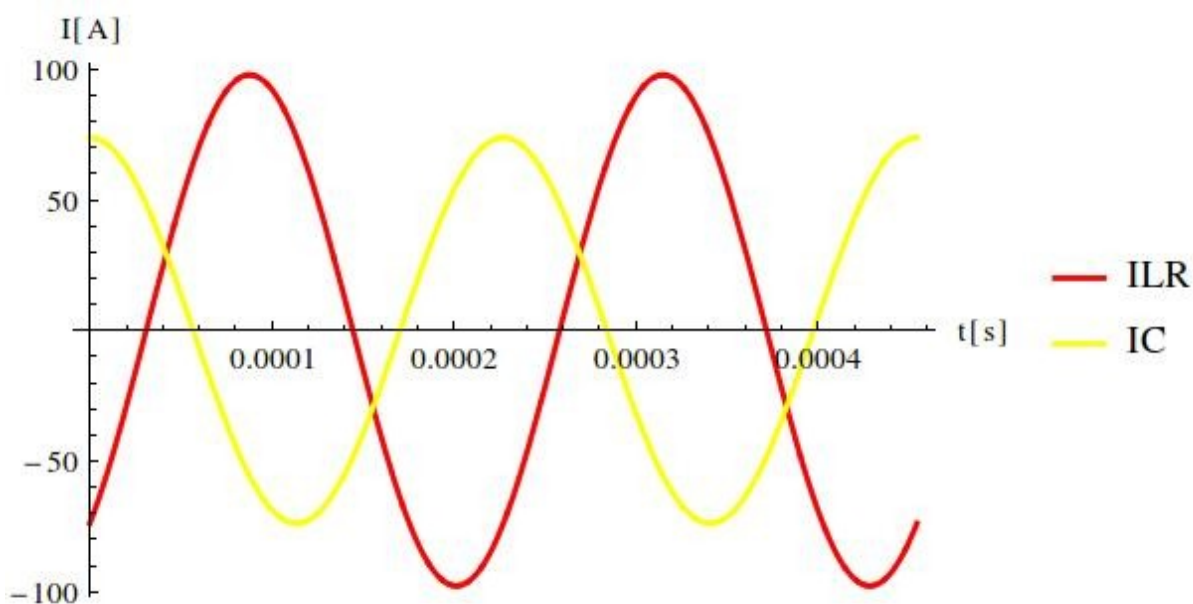
$$C = 5.34 \text{ } [\mu\text{F}]$$

Když známe hodnoty parametrů induktoru, můžeme vypočítat obvodové rovnice (2.39), (2.40) a (2.41). Po jejich vyřešení dostaneme hodnotu proudu v jednotlivých větvích, tedy proud tekoucí kapacitorem a proud tekoucí induktorem a rezistorem.

$$I_C = 52.2 \text{ } [\text{A}]$$

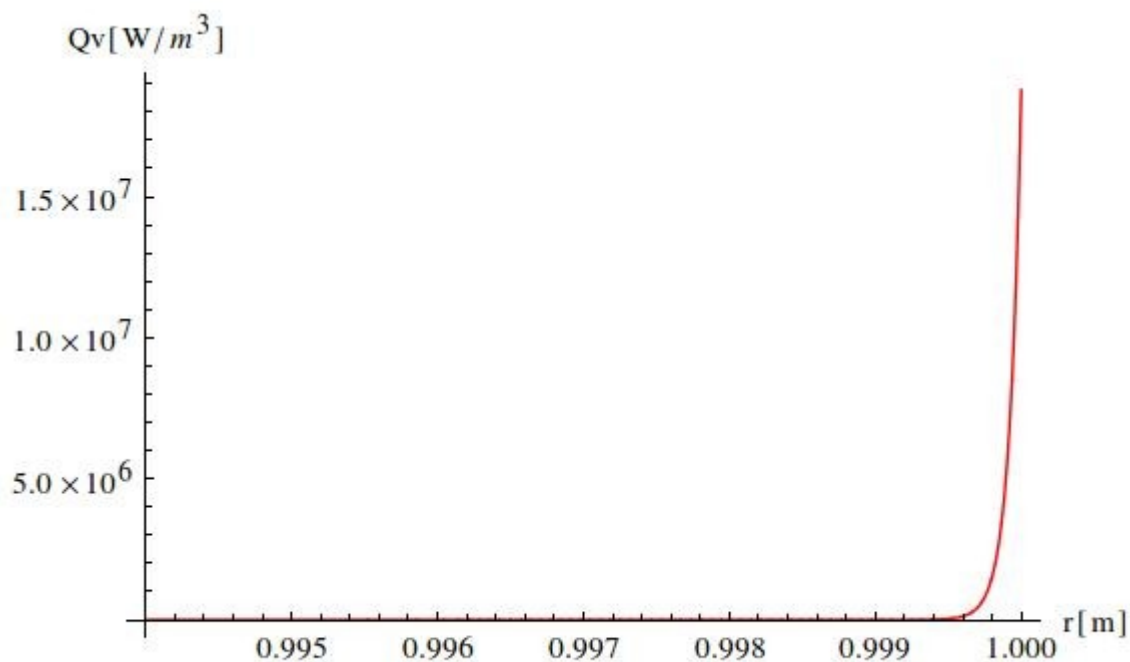
$$I_{RL} = 69,16 \text{ } [\text{A}]$$

Průběh proudů a jejich vzájemný posun je znázorněn na Obr.3.4.



Obr. 3.4 Průběh proudů a jejich vzájemný posun

Po vypočtení proudů je třeba vypočítat teplotní pole. Pro výpočet parametru  $Q_v$  použijeme rovnici (2.44) a zhotovíme závislost  $Q_v$  na poloměru, který je vyobrazen na Obr.3.5.



Obr. 3.5 Závislost tepla z vnějších tepelných zdrojů na poloměru

Vztahy pro výpočet v kapitole 2.4 nejsou upraveny pro válcové prostředí. Upravená Fourier-Kirchhoffova rovnice pro válcové prostředí má tvar:

$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + Q_v \quad (3.1)$$

A jelikož je rovnice (3.1) parciálně diferenciální je třeba uvést okrajové podmínky pro válcové prostředí:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha \Delta T + \sigma \epsilon (T^4 - T_s^4) \quad (3.2)$$

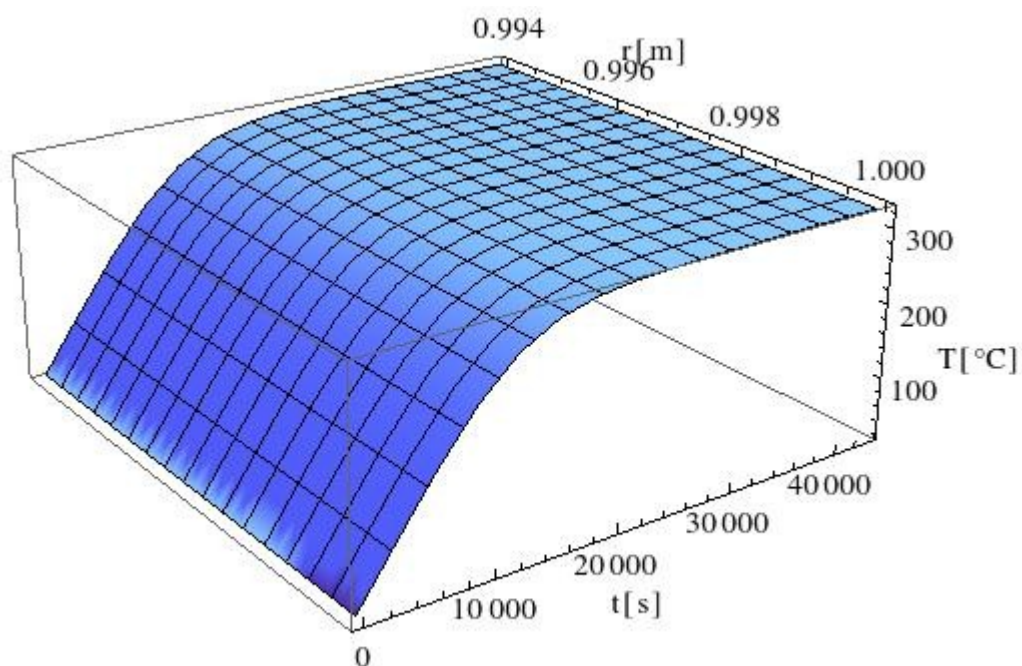
$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha \Delta T \quad (3.3)$$

, kde

$T_s$  je teplota sálání [K]

$r$  je poloměr [m]

Po vypočtení rovnice (3.1) zhotovíme graf závislosti teploty na poloměru a čase, který je vyobrazen na Obr. 3.6.



*Obr. 3.6 Graf závislosti teploty na poloměru a čase*

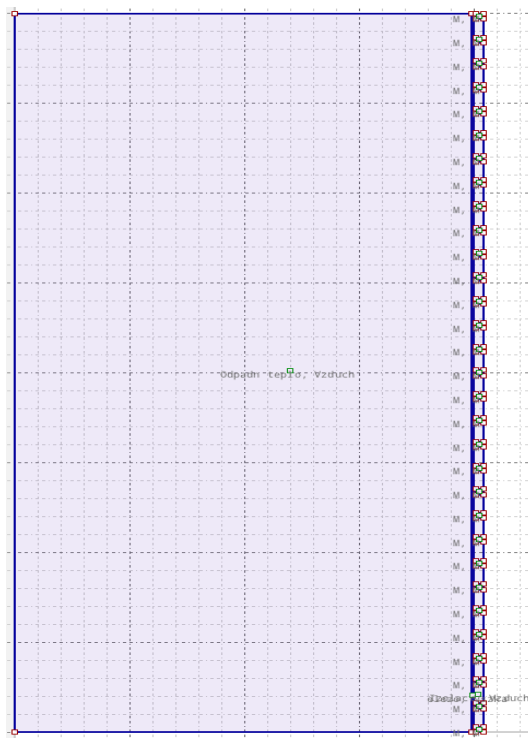
## 3.2. Výpočet pomocí softwaru Agros2D

### 3.2.1. Základní popis softwaru Agros2D

Agros2D je univerzální multiplatformní aplikace určená pro řešení fyzikálních polí. Je napsaná v jazyce C++ a pro řešení parciálních diferenciálních rovnic využívá knihovnu Hermes2D založenou na hp-FEM (adaptivní metoda konečných prvků vyššího řádu přesnosti). Aplikace je vyvíjena na Katedře teoretické elektrotechniky FEL ZČU v Plzni a je distribuována pod GPL licenci.[10]

### 3.2.2. Model pro preprocessor

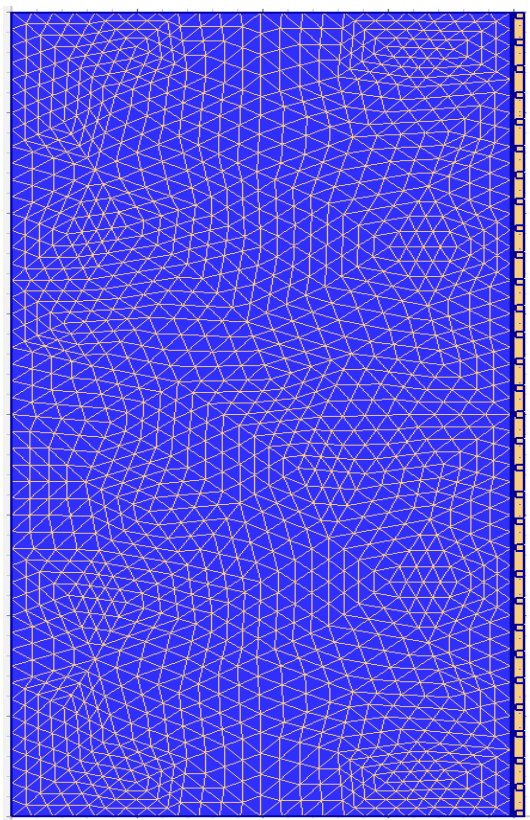
Do preprocesoru pomocí uzlů a hran vytvoříme model cívky a vsázky, viz Obr. 3.7



Obr. 3.7 Model cívky a vsázky

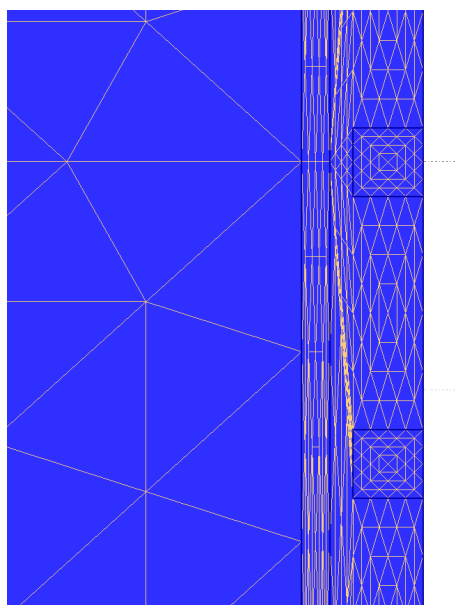
Po nakreslení modelu je třeba definovat okrajové podmínky pro elektromagnetické a tepelné pole a ještě zadat parametry materiálů. Po splnění těchto úkonů spustíme řešení. Jako první se vytvoří nestrukturovanou trojúhelníkovou síť, kde pro každé dva trojúhelníky platí, že nemají žádnou společnou plochu. Znázornění této sítě je na Obr. 3.8.





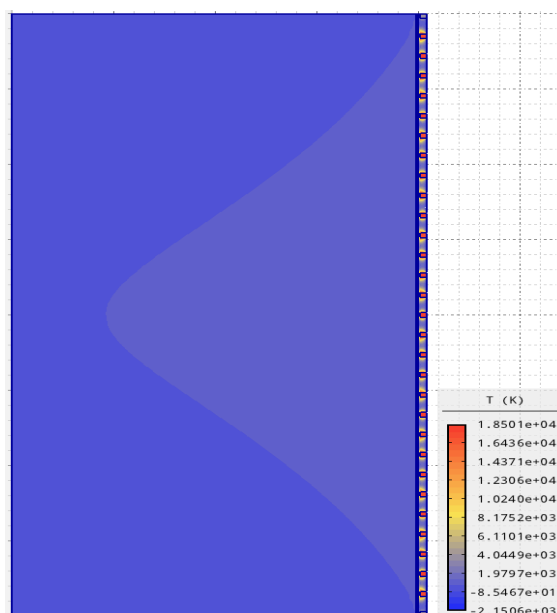
*Obr. 3.8 Výpočetní trojúhelníková  
sít'*

Na Obr. 3.8 Je vidět, že uvnitř vsázky je řídká síť, jelikož zde nejsou geometrické změny. Hustá síť je v blízkosti induktoru, zde jsou geometrické změny. Přiblížení výpočetní sítě je zobrazeno na Obr. 3.9



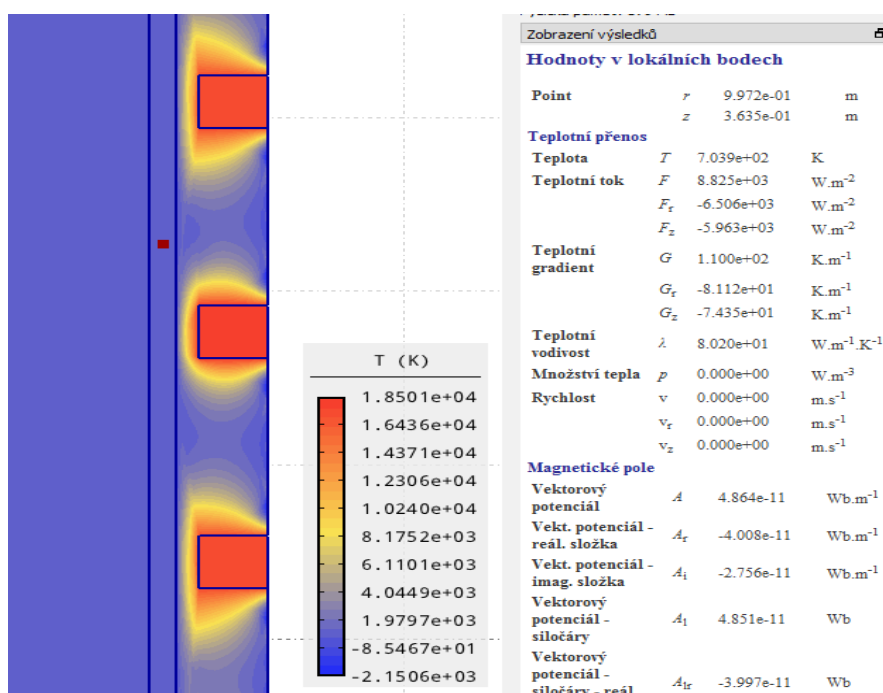
*Obr. 3.9 Přiblížení výpočetní  
sítě*

Po vytvoření výpočetní sítě se spustí výpočet tepelného pole, které je zobrazeno na obr. 3.10.



Obr.3.10 Teplotní pole v SW Agros2D

Přiblížení tepelného pole v okolí vodičů a vsázky je zobrazeno na Obr. 3.11. Na tomto obrázku jsou zobrazeny i vypočtené hodnoty ve vsázce. Nás zajímá teplota ve vsázce a ta je  $T = 704 \text{ [K]}$ , což odpovídá  $T = 421 \text{ [}^{\circ}\text{C]}$ .



Obr.3.11 Teplotní pole cívky a vsázky

## 4. Závěr

Cílem této práce bylo seznámení s fyzikální a matematickou teorií indukčního ohřevu. Dále objasněním výpočtu elektromagnetického pole a teplotního pole duté a plné válcové vsázky pomocí metody náhradního schématu a modelováním v softwaru Agros2D.

Získané informace, které jsou nezbytné pro řešení zadaného úkolu, jsou uvedeny v teoretické části. V praktické části je uvedeno řešení elektromagnetického a tepelného pole pro zvolenou dutou vsázku pomocí metody náhradního schématu a modelováním v softwaru Agros2D.

Ve výpočtu pomocí náhradního schématu aplikovaného do softwaru Mathematica nám vyšla ustálená teplota ve vsázce  $320^{\circ}\text{C}$  (593 K). Hodnota ustálené teploty ve vsázce při použití modelu v softwaru Agros2D vyšla  $431^{\circ}\text{C}$  (704 K).

Rozdíl ustálené teploty v duté vsázce ve zvolených metodách je 111 K. Tento rozdíl byl způsoben zanedbáním vlivu odvodu tepla vodiče cívky při výpočtu pomocí náhradního schématu, kterým jsme se v Agros2D nezabývali.

## 5. Použitá literatura

- [1] Szántó Ladislav: Maxwellovy rovnice a jejich názorné odvození, Ben, 2012
- [2] Rada Josef a kol.: Elektrotepelná technika, SNTL/ALFA, 1985
- [3] Kyncl Jan: Přednášky k předmětu Energetika 3, 2013
- [4] Langer Emil: Teorie indukčního a dielektrického tepla, Academia, 1979
- [5] Rytina Tomáš: Návrh indukčního ohřevu, ČVUT, 2004
- [6] Musálek Lubomír: Indukční ohřev válcových předmětů, ČVUT, 2009
- [7] Vladimír Kolář, Ivan Němec: FEM principy a praxe metody konečných prvků, Computer Press, 1997
- [8] Ivo Doležel: Numerické metody řešení okrajových úloh, [Učební text], Plzeň:Doležel, 2002
- [9] Zdeněk Novák: Zdroje pro vysokofrekvenční ohřevy, ČVUT, 2012
- [10] Pavek Karban: ABCLinuxu [Online] 30.3.2012  
<http://www.abclinuxu.cz/software/veda/agros2d>
- [11] Pavel Karban, František Mach, Pavel Kůs, Ivo Doležel: Agros2D [Online]  
<http://www.agros2d.org/>
- [12] Stephen Wolfram: Wolfram Mathematica  
<http://www.wolfram.com/>
- [13] Václav Žák: Mathematica CZ  
[http://www.mathematica.cz/produkty.php?p\\_mathematica](http://www.mathematica.cz/produkty.php?p_mathematica)

## **6. Přílohy**

### **6.1. Příloha: Zdrojový kód v SW Mathematica pro výpočet elektromagnetického a tepelného pole pro dutou vsázku**

```

ClearAll["Global`*"]
(*verze funkcní pouze ve Wolfram Mathematica 9*)

myPl[co_, popis_] := Plot[co, {r, r4, r2}, AxesLabel → {"r [m]", ToString[popis]},
    PlotStyle → {Blue, Thickness[0.006]}, AxesOrigin → {r4, 0}, GridLines → Automatic];

mm = 10^-3;
cm = 0.01;
mikro = 10^-6;

ClearAll[tmax];
doscisla = {d → 2000 mm, stena → 6 mm, rmin → 0.00001, γ → 57 * 10^5,
    γCu → 5.5 * 10^7, μ0 → 4 * Pi * 10^-7, μr → 400, f → 4400, N1 → 31, I1 → 75.,
    delkainduktoru → 2000 mm, μ → μ0 * μr, rocpl → 7850 * 0.46 * 10^3};
dostep = {σ → 5.67 * 10^-8, ρFe → 7874, λFe → 80.2,
    cpFe → 0.11 * 4186, ε → 0.8, α → 15, To → 20};
dos = Union[dostep, doscisla];

Evect = {0, Efi[r], 0};
Hvect = {0, 0, Hz[r]};

leftmaxE = -Curl[Evect, {r, fi, z}, "Cylindrical"][[3]] - I * ω * μ * Hvect[[3]];
leftmaxH = -Curl[Hvect, {r, fi, z}, "Cylindrical"][[2]] + γ * Evect[[2]];

resE = Solve[leftmaxH == 0, Efi[r]][[1]];
resH = Solve[leftmaxE == 0, Hz[r]][[1]];

derEfir = D[Efi[r] /. resE, r];
derHzr = Simplify[D[Hz[r] /. resH, r]];

rovH = Simplify[γ * leftmaxE /. {D[Efi[r], r] → derEfir, resE[[1]]}];
rovE = FullSimplify[leftmaxH /. {D[Hz[r], r] → derHzr, resH[[1]]}];

r2 = d / 2 /. dos;
r4 = r2 - stena /. dos;
ω = 2 * Pi * f /. dos;

ClearAll[becko, hacko, ecko]
predresE = DSolve[rovE == 0 /. dos, Efi[r], r][[1]];
predresH = DSolve[rovH == 0 /. dos, {Hz[r]}, r][[1]] /. C[2] → 0;
predresHder = D[predresH, r];
okrH1 = Hz[r] == (N1 * I1) / delkainduktoru /. predresH /. r → r2 /. dos;
cecko = Solve[okrH1, C[1]][[1]];
hacko[r_] = (Hz[r] /. predresH[[1]]) /. cecko /. dos;
ecko[r_] = Efi[r] /. resE /. predresHder /. cecko /. dos;
becko[r_] = μ * hacko[r] /. dos;

rvnitrni = r4 /. dos;
rvnejsi = r2 /. dos;

```

```

mezeracivky = 5 mm; (*přibližně dáno 0mm*)
r1 = r2 + mezeracivky;
Ddrat = 15 mm;

fi1 = NIntegrate[2 * Pi * r * hacko[r2 /. dos], Evaluate[{r, r2, r1} /. dos]] // Quiet;
fi2 =
  (μr * NIntegrate[2 * Pi * r * hacko[r], Evaluate[{r, r4, r2} /. dos]] // Quiet) /. dos;
fi4 = NIntegrate[2 * Pi * r * hacko[r4 /. dos], Evaluate[{r, 0, r4} /. dos]] // Quiet;
tokcelkem = N1 * μ0 * (fi1 + fi2 + fi4) /. dos;
indukovanenapeti = tokcelkem * I * 2 * Pi * f /. dos;

Rdratu = 
$$\frac{2 * \text{Pi} * (r1 + 0.5 * Ddrat) * N1}{\gamma_{\text{Cu}} * \frac{\text{Pi} * Ddrat^2}{4}} /. dos;$$

Napeticivky = I1 * Rdratu /. dos;
NapetiInduktoru = indukovanenapeti + Napeticivky;
impedance = 
$$\frac{\text{NapetiInduktoru}}{I1} /. dos;$$

ImpedanceBezInduktoru = 
$$\frac{\text{indukovanenapeti}}{I1} /. dos;$$

L = 
$$\frac{\text{Im}[\text{impedance}]}{\omega};$$

R = Re[impedance];
Kondenzator =
  (I1^2 * Im[impedance]) / (ω * Abs[NapetiInduktoru] * Abs[NapetiInduktoru]) /. dos;
Ucinnost = 
$$\frac{\text{Re}[\text{ImpedanceBezInduktoru}]}{\text{Re}[\text{impedance}]};$$

Uz = 500;
ObvodovaRovnice =
  {Uz == R * ILR + I * ω * L * ILR, Uz == 
$$\frac{1}{I * \omega * \text{Kondenzator}} * Ic, Iz == Ic + ILR\};$$

VyresenaObvodovka = Solve[ObvodovaRovnice, {Ic, Iz, ILR}][[1]];

ILRcas = Im[Evaluate[ILR /. VyresenaObvodovka] * EI*ω*t] // ComplexExpand
ICcas = Im[Evaluate[Ic /. VyresenaObvodovka] * EI*ω*t]

ILReff1 = 
$$\sqrt{f * \text{NIntegrate}[\text{ILRcas}^2, \{t, 0, f^{-1} /. dos\}]} /. dos$$

ILReff = 
$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\text{Evaluate}[\text{ILR} /. \text{VyresenaObvodovka}] // \text{Abs});$$

ICEff = 
$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\text{Evaluate}[\text{Ic} /. \text{VyresenaObvodovka}] // \text{Abs});$$

Qv[r_] = γ * Abs[ecko[r]^2] /. dos

```

```

Tvzduch = 20;
Tsalani = 15;
alfa = 10;

minuta = 60;
hodina = 60 * minuta;
tmax = 12 hodina;

rce =
  rocp * D[T[r, t], t] == Div[λFe * Grad[T[r, t], {r, fi, z}, "Cylindrical"], {r, fi, z},
    "Cylindrical"] + Qv[r] /. dos
poc = T[r, t] == Tvzduch /. t -> 0;
OkrOut = -λFe * D[T[r, t], r] ==
  Tanh[1 t] (alfa * (T[r, t] - Tvzduch) + σ * ε * (T[r, t]^4 - Tsalani^4)) /. dos /. r -> r2;
OkrIn = (-λFe * D[T[r, t], r] == Tanh[1 t] * alfa * (T[r, t] - Tvzduch)) /. dos /. r -> r4;

res = NDSolve[{rce, poc, OkrIn, OkrOut}, T[r, t],
  {r, r4, r2}, {t, 0, tmax}, MaxStepSize -> {10^-3, Automatic}]

```



## **6.2. Příloha: Zdrojový kód pro výpočet elektromagnetického a tepelného pole v SW Agros2D**

```

import agros2d as a2d

# problem
problem = a2d.problem(clear = True)
problem.coordinate_type = "axisymmetric"
problem.mesh_type = "triangle"
problem.frequency = 4400

# fields
# heat
heat = a2d.field("heat")
heat.analysis_type = "steadystate"
heat.matrix_solver = "mumps"
heat.number_of_refinements = 2
heat.polynomial_order = 2
heat.adaptivity_type = "disabled"
heat.solver = "linear"

# boundaries
heat.add_boundary("Symetrie", "heat_heat_flux", {"heat_heat_flux" : 0,
"heat_convection_heat_transfer_coefficient" : 5, "heat_convection_external_temperature" : 293.15,
"heat_radiation_emissivity" : 0, "heat_radiation_ambient_temperature" : 293.15})
heat.add_boundary("Vnitřek", "heat_heat_flux", {"heat_heat_flux" : 0,
"heat_convection_heat_transfer_coefficient" : 10, "heat_convection_external_temperature" : 293.15,
"heat_radiation_emissivity" : 0, "heat_radiation_ambient_temperature" : 293.15})
heat.add_boundary("Okraj", "heat_heat_flux", {"heat_heat_flux" : 0,
"heat_convection_heat_transfer_coefficient" : 5, "heat_convection_external_temperature" : 293.15,
"heat_radiation_emissivity" : 0, "heat_radiation_ambient_temperature" : 293.15})

# materials
heat.add_material("Měď", {"heat_conductivity" : 385, "heat_volume_heat" : 0, "heat_velocity_x" : 0,
"heat_velocity_y" : 0, "heat_velocity_angular" : 0, "heat_density" : 8960, "heat_specific_heat" : 383})
heat.add_material("Odpadní teplo", {"heat_conductivity" : 0.02, "heat_volume_heat" : 0,
"heat_velocity_x" : 0, "heat_velocity_y" : 0, "heat_velocity_angular" : 0, "heat_density" : 0, "heat_specific_heat" : 0})
heat.add_material("Železo", {"heat_conductivity" : 80.2, "heat_volume_heat" : 0, "heat_velocity_x" : 0,
"heat_velocity_y" : 0, "heat_velocity_angular" : 0, "heat_density" : 7850, "heat_specific_heat" : 460})
heat.add_material("Izolace", {"heat_conductivity" : 0.1, "heat_volume_heat" : 0, "heat_velocity_x" : 0,
"heat_velocity_y" : 0, "heat_velocity_angular" : 0, "heat_density" : 0, "heat_specific_heat" : 0})

# magnetic
magnetic = a2d.field("magnetic")
magnetic.analysis_type = "harmonic"
magnetic.matrix_solver = "mumps"

```

```

magnetic.number_of_refinements = 2
magnetic.polynomial_order = 2
magnetic.adaptivity_type = "disabled"
magnetic.solver = "linear"

# boundaries
magnetic.add_boundary("A=0", "magnetic_potential", {"magnetic_potential_real" : 0,
"magnetic_potential_imag" : 0})

# materials
magnetic.add_material("Vzduch", {"magnetic_permeability" : 1, "magnetic_conductivity" : 0,
"magnetic_remanence" : 0, "magnetic_remanence_angle" : 0, "magnetic_velocity_x" : 0,
"magnetic_velocity_y" : 0, "magnetic_velocity_angular" : 0, "magnetic_current_density_external_real" : 0,
"magnetic_current_density_external_imag" : 0, "magnetic_total_current_prescribed" : 0,
"magnetic_total_current_real" : 0, "magnetic_total_current_imag" : 0})

magnetic.add_material("Měď", {"magnetic_permeability" : 1, "magnetic_conductivity" : 57000000,
"magnetic_remanence" : 0, "magnetic_remanence_angle" : 0, "magnetic_velocity_x" : 0,
"magnetic_velocity_y" : 0, "magnetic_velocity_angular" : 0, "magnetic_current_density_external_real" : 0,
"magnetic_current_density_external_imag" : 0, "magnetic_total_current_prescribed" : 1,
"magnetic_total_current_real" : 64, "magnetic_total_current_imag" : -75})

magnetic.add_material("Vsázka", {"magnetic_permeability" : 400, "magnetic_conductivity" : 5700000,
"magnetic_remanence" : 0, "magnetic_remanence_angle" : 0, "magnetic_velocity_x" : 0,
"magnetic_velocity_y" : 0, "magnetic_velocity_angular" : 0, "magnetic_current_density_external_real" : 0,
"magnetic_current_density_external_imag" : 0, "magnetic_total_current_prescribed" : 0,
"magnetic_total_current_real" : 0, "magnetic_total_current_imag" : 0})

# geometry
geometry = a2d.geometry
geometry.add_edge(1, 0, 0.994, 0, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(0, 0, 0.994, 0, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(0.994, 2, 0, 2, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(0, 2, 0, 0, boundaries = {"heat" : "Symetrie", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1, 2, 1, 0)
geometry.add_edge(0.994, 2, 1, 2, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(0.994, 0, 0.994, 2, boundaries = {"heat" : "Vnitřek"})
geometry.add_edge(1.005, 0.015, 1.005, 0)
geometry.add_edge(1.005, 0, 1.02, 0, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0, 1.02, 0.015, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0.015, 1.005, 0.015)
geometry.add_edge(1.005, 0.06616, 1.02, 0.06616)
geometry.add_edge(1.02, 0.06616, 1.02, 0.08116, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0.08116, 1.005, 0.08116)
geometry.add_edge(1.005, 0.08116, 1.005, 0.06616)
geometry.add_edge(1.005, 0.14732, 1.005, 0.13232)
geometry.add_edge(1.005, 0.13232, 1.02, 0.13232)

```

```

geometry.add_edge(1.02, 0.13232, 1.02, 0.14732, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0.14732, 1.005, 0.14732)
geometry.add_edge(1.005, 0.19848, 1.02, 0.19848)
geometry.add_edge(1.02, 0.19848, 1.02, 0.21348, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0.21348, 1.005, 0.21348)
geometry.add_edge(1.005, 0.21348, 1.005, 0.19848)
geometry.add_edge(1.005, 0.26464, 1.02, 0.26464)
geometry.add_edge(1.02, 0.26464, 1.02, 0.27964, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0.27964, 1.005, 0.27964)
geometry.add_edge(1.005, 0.27964, 1.005, 0.26464)
geometry.add_edge(1.005, 0.3308, 1.02, 0.3308)
geometry.add_edge(1.02, 0.3308, 1.02, 0.3458, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0.3458, 1.005, 0.3458)
geometry.add_edge(1.005, 0.3458, 1.005, 0.3308)
geometry.add_edge(1.005, 0.39696, 1.02, 0.39696)
geometry.add_edge(1.02, 0.39696, 1.02, 0.41196, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0.41196, 1.005, 0.41196)
geometry.add_edge(1.005, 0.41196, 1.005, 0.39696)
geometry.add_edge(1.005, 0.46312, 1.02, 0.46312)
geometry.add_edge(1.02, 0.46312, 1.02, 0.47812, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0.47812, 1.005, 0.47812)
geometry.add_edge(1.005, 0.47812, 1.005, 0.46312)
geometry.add_edge(1.005, 0.52928, 1.02, 0.52928)
geometry.add_edge(1.02, 0.52928, 1.02, 0.54428, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0.54428, 1.005, 0.54428)
geometry.add_edge(1.005, 0.54428, 1.005, 0.52928)
geometry.add_edge(1.005, 0.59544, 1.02, 0.59544)
geometry.add_edge(1.02, 0.59544, 1.02, 0.61044, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0.61044, 1.005, 0.61044)
geometry.add_edge(1.005, 0.61044, 1.005, 0.59544)
geometry.add_edge(1.005, 0.6616, 1.02, 0.6616)
geometry.add_edge(1.02, 0.6616, 1.02, 0.6766, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0.6766, 1.005, 0.6766)
geometry.add_edge(1.005, 0.6766, 1.005, 0.6616)
geometry.add_edge(1.005, 0.72776, 1.02, 0.72776)
geometry.add_edge(1.02, 0.72776, 1.02, 0.74276, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0.74276, 1.005, 0.74276)
geometry.add_edge(1.005, 0.74276, 1.005, 0.72776)
geometry.add_edge(1.005, 0.79392, 1.02, 0.79392)
geometry.add_edge(1.02, 0.79392, 1.02, 0.80892, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0.80892, 1.005, 0.80892)

```

```

geometry.add_edge(1.005, 0.80892, 1.005, 0.79392)
geometry.add_edge(1.005, 0.86008, 1.02, 0.86008)
geometry.add_edge(1.02, 0.86008, 1.02, 0.87508, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0.87508, 1.005, 0.87508)
geometry.add_edge(1.005, 0.87508, 1.005, 0.86008)
geometry.add_edge(1.005, 0.92624, 1.02, 0.92624)
geometry.add_edge(1.02, 0.92624, 1.02, 0.94124, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0.94124, 1.005, 0.94124)
geometry.add_edge(1.005, 0.94124, 1.005, 0.92624)
geometry.add_edge(1.005, 0.9924, 1.02, 0.9924)
geometry.add_edge(1.02, 0.9924, 1.02, 1.0074, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 1.0074, 1.005, 1.0074)
geometry.add_edge(1.005, 1.0074, 1.005, 0.9924)
geometry.add_edge(1.02, 1.05856, 1.02, 1.07356, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 1.07356, 1.005, 1.07356)
geometry.add_edge(1.005, 1.07356, 1.005, 1.05856)
geometry.add_edge(1.005, 1.05856, 1.02, 1.05856)
geometry.add_edge(1.005, 1.12472, 1.02, 1.12472)
geometry.add_edge(1.02, 1.12472, 1.02, 1.13972, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 1.13972, 1.005, 1.13972)
geometry.add_edge(1.005, 1.13972, 1.005, 1.12472)
geometry.add_edge(1.02, 1.19088, 1.02, 1.20588, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 1.20588, 1.005, 1.20588)
geometry.add_edge(1.005, 1.20588, 1.005, 1.19088)
geometry.add_edge(1.005, 1.19088, 1.02, 1.19088)
geometry.add_edge(1.005, 1.25704, 1.02, 1.25704)
geometry.add_edge(1.02, 1.25704, 1.02, 1.27204, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 1.27204, 1.005, 1.27204)
geometry.add_edge(1.005, 1.27204, 1.005, 1.25704)
geometry.add_edge(1.005, 1.3232, 1.02, 1.3232)
geometry.add_edge(1.02, 1.3232, 1.02, 1.3382, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 1.3382, 1.005, 1.3382)
geometry.add_edge(1.005, 1.3382, 1.005, 1.3232)
geometry.add_edge(1.005, 1.38936, 1.02, 1.38936)
geometry.add_edge(1.02, 1.38936, 1.02, 1.40436, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 1.40436, 1.005, 1.40436)
geometry.add_edge(1.005, 1.40436, 1.005, 1.38936)
geometry.add_edge(1.005, 1.45552, 1.02, 1.45552)
geometry.add_edge(1.02, 1.45552, 1.02, 1.47052, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 1.47052, 1.005, 1.47052)
geometry.add_edge(1.005, 1.47052, 1.005, 1.45552)

```

```

geometry.add_edge(1.005, 1.52168, 1.02, 1.52168)
geometry.add_edge(1.02, 1.52168, 1.02, 1.53668, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 1.53668, 1.005, 1.53668)
geometry.add_edge(1.005, 1.53668, 1.005, 1.52168)
geometry.add_edge(1.02, 1.58784, 1.02, 1.60284, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 1.60284, 1.005, 1.60284)
geometry.add_edge(1.005, 1.60284, 1.005, 1.58784)
geometry.add_edge(1.005, 1.58784, 1.02, 1.58784)
geometry.add_edge(1.005, 1.654, 1.02, 1.654)
geometry.add_edge(1.02, 1.654, 1.02, 1.669, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 1.669, 1.005, 1.669)
geometry.add_edge(1.005, 1.669, 1.005, 1.654)
geometry.add_edge(1.02, 1.72016, 1.02, 1.73516, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 1.73516, 1.005, 1.73516)
geometry.add_edge(1.005, 1.73516, 1.005, 1.72016)
geometry.add_edge(1.005, 1.72016, 1.02, 1.72016)
geometry.add_edge(1.005, 1.78632, 1.02, 1.78632)
geometry.add_edge(1.02, 1.78632, 1.02, 1.80132, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 1.80132, 1.005, 1.80132)
geometry.add_edge(1.005, 1.80132, 1.005, 1.78632)
geometry.add_edge(1.02, 1.85248, 1.02, 1.86748, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 1.86748, 1.005, 1.86748)
geometry.add_edge(1.005, 1.86748, 1.005, 1.85248)
geometry.add_edge(1.005, 1.85248, 1.02, 1.85248)
geometry.add_edge(1.005, 1.91864, 1.02, 1.91864)
geometry.add_edge(1.02, 1.93364, 1.02, 1.91864, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.005, 1.93364, 1.02, 1.93364)
geometry.add_edge(1.005, 1.93364, 1.005, 1.91864)
geometry.add_edge(1.005, 1.985, 1.02, 1.985)
geometry.add_edge(1.02, 1.985, 1.02, 2, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 2, 1.005, 2, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.005, 2, 1.005, 1.985)
geometry.add_edge(1, 2, 1.005, 2, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 1.985, 1.02, 1.93364, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 1.91864, 1.02, 1.86748, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 1.85248, 1.02, 1.80132, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 1.78632, 1.02, 1.73516, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 1.72016, 1.02, 1.669, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 1.654, 1.02, 1.60284, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 1.58784, 1.02, 1.53668, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 1.52168, 1.02, 1.47052, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})

```

```

geometry.add_edge(1.02, 1.45552, 1.02, 1.40436, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 1.38936, 1.02, 1.3382, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 1.3232, 1.02, 1.27204, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 1.25704, 1.02, 1.20588, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 1.19088, 1.02, 1.13972, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 1.12472, 1.02, 1.07356, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 1.05856, 1.02, 1.0074, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0.9924, 1.02, 0.94124, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0.92624, 1.02, 0.87508, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0.86008, 1.02, 0.80892, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0.79392, 1.02, 0.74276, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0.72776, 1.02, 0.6766, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0.6616, 1.02, 0.61044, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0.59544, 1.02, 0.54428, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0.52928, 1.02, 0.47812, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0.46312, 1.02, 0.41196, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0.39696, 1.02, 0.3458, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0.3308, 1.02, 0.27964, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0.26464, 1.02, 0.21348, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0.19848, 1.02, 0.14732, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0.13232, 1.02, 0.08116, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.02, 0.06616, 1.02, 0.015, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})
geometry.add_edge(1.005, 0, 1, 0, boundaries = {"heat" : "Okraj", "magnetic" : "A=0"})

```

```

geometry.add_label(1.01247, 0.00713364, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})
geometry.add_label(0.598238, 1.00512, materials = {"heat" : "Odpadní teplo", "magnetic" : "Vzduch"})
geometry.add_label(1.01247, 0.0733336, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})
geometry.add_label(1.01247, 0.139534, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})
geometry.add_label(1.01247, 0.205734, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})
geometry.add_label(1.01247, 0.271934, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})
geometry.add_label(1.01247, 0.338134, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})
geometry.add_label(1.01247, 0.404334, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})
geometry.add_label(1.01247, 0.470534, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})
geometry.add_label(1.01247, 0.536734, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})
geometry.add_label(1.01247, 0.602934, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})
geometry.add_label(1.01247, 0.669134, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})
geometry.add_label(1.01247, 0.735334, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})
geometry.add_label(1.01247, 0.801534, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})
geometry.add_label(1.01247, 0.867734, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})
geometry.add_label(1.01247, 0.933934, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})
geometry.add_label(1.01247, 1.00013, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})

```

```

geometry.add_label(1.01247, 1.06633, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})
geometry.add_label(1.01247, 1.13253, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})
geometry.add_label(1.01247, 1.19873, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})
geometry.add_label(1.01247, 1.26493, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})
geometry.add_label(1.01247, 1.33113, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})
geometry.add_label(1.01247, 1.39733, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})
geometry.add_label(1.01247, 1.46353, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})
geometry.add_label(1.01247, 1.52973, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})
geometry.add_label(1.01247, 1.59593, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})
geometry.add_label(1.01247, 1.66213, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})
geometry.add_label(1.01247, 1.72833, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})
geometry.add_label(1.01247, 1.79453, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})
geometry.add_label(1.01247, 1.86073, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})
geometry.add_label(1.01247, 1.92693, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})
geometry.add_label(1.01247, 1.99313, materials = {"heat" : "Měď", "magnetic" : "Měď"})
geometry.add_label(1.00923, 0.105653, materials = {"heat" : "Izolace", "magnetic" : "Vzduch"})
geometry.add_label(0.997507, 0.102893, materials = {"heat" : "Železo", "magnetic" : "Vsázka"})
a2d.view.zoom_best_fit()

```